



**TUGAS AKHIR– SM141501**

**PENERAPAN METODE MULTIPLIER LAGRANGE  
UNTUK MEMINIMALKAN BIAYA PERSEDIAAN  
SUKU CADANG DENGAN PERBEDAAN KELAS  
PELANGGAN**

**IMROATUS SIYAMAH  
NRP 1213 100 016**

**Dosen Pembimbing :  
Valeriana Lukitosari, S.Si, MT**

**JURUSAN MATEMATIKA  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
Surabaya 2017**





**FINAL PROJECT– SM141501**

***LAGRANGE MULTIPLIER METHOD TO MINIMIZE  
INVESTMENT COST OF SPARE PART INVENTORY  
MODEL WITH CUSTOMER DIFFRENTIATION***

**IMROATUS SIYAMAH**

**NRP 1213 100 016**

**Supervisor :**

**Valeriana Lukitosari, S.Si, MT**

**DEPARTMENT OF MATHEMATIC**

**Faculty of Mathematics and Natural Sciences**

**Sepuluh Nopember Institute of Technology**

**Surabaya 2017**



## LEMBAR PENGESAHAN

### PENERAPAN METODE MULTIPLIER LAGRANGE UNTUK MEMINIMALKAN BIAYA PERSEDIAAN SUKU CADANG DENGAN PERBEDAAN KELAS PELANGGAN


### *LAGRANGE MULTIPLIER METHOD TO MINIMIZE INVESTMENT COST OF SPARE PART INVENTORY MODEL WITH CUSTOMER DIFFERENTIATION*

### TUGAS AKHIR

Diajukan untuk Memenuhi Salah Satu Syarat  
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains  
Pada Bidang Studi Matematika Terapan  
Program Studi S-1 Jurusan Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :  
IMROATUS SIYAMAH  
NRP. 1213 100 016

Menyetujui,  
Dosen Pembimbing

  
Valeriana Lukitosari, S.Si, MT  
NIP. 19710928 199802 2 001

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika  
FMIPA ITS

  
Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT  
NIP. 19700831 199403 1 003

Surabaya, Januari 2017



**PENERAPAN METODE MULTIPLIER LAGRANGE  
UNTUK MEMINIMALKAN BIAYA PERSEDIAAN SUKU  
CADANG DENGAN PERBEDAAN KELAS PELANGGAN**

Nama : Imroatus Siyamah  
NRP : 1213100016  
Jurusan : Matematika FMIPA-ITS  
Pembimbing : Valeriana Lukitosari, S.Si, MT

**ABSTRAK**

Pelanggan memiliki permintaan yang bervariasi terhadap produk yang dihasilkan oleh suatu perusahaan. Variasi tersebut bisa berupa jumlah permintaan. Setiap permintaan yang tidak dapat dipenuhi akan memiliki risiko, baik *backorder* atau *lost sales*. Oleh karena itu, perlu ada pengelompokan pelanggan berdasarkan jumlah permintaan. Pengelompokan ini bertujuan untuk meminimalkan risiko tersebut. Permasalahan pada tugas akhir ini fokus pada persediaan suku cadang untuk memenuhi permintaan berdasarkan adanya kerusakan pada suku cadang. Faktor yang diperhatikan adalah perbedaan kelas pelanggan. Perbedaan ini didasarkan pada *fill rate* masing-masing kelas pelanggan. *Fill rate* merupakan bagian dari permintaan yang dapat dipenuhi dari stok yang tersedia tanpa adanya *backorder* dan *lost sales*. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk meminimalkan total biaya persediaan dengan memperhatikan perbedaan kelas pelanggan. Dengan menggunakan disiplin antrian FCFS, model persediaan dengan teori METRIC dapat diselesaikan dengan metode multiplier Lagrange. Simulasi dengan 5 kelas pelanggan yang dilakukan dalam tugas akhir ini dengan menggunakan data 10 suku cadang dari mesin server di PT. XYZ dapat meminimalkan biaya persediaan sampai 6.4% dengan peluang *backorder* 0.8%.

**Kata Kunci:** *spare part, fill rate, perbedaan kelas pelanggan, pengali Lagrange.*

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*



# **LAGRANGE MULTIPLIER METHOD TO MINIMIZE INVESTMENT COST OF SPARE PART INVENTORY MODEL WITH CUSTOMER DIFFERENTIATION**

*Name* : Imroatus Siyamah  
*NRP* : 1213100016  
*Department* : Mathematics  
*Supervisor* : Valeriana Lukitosari, S.Si, MT

## **ABSTRACT**

*Customers have a different demand of product which are produced by a company. The variation can be the number of demand. Every demand that can't be satisfied will be at risk, either backorder or lost sales. Therefore, we need customer classification by the number of demand. This classification is made for minimizing the risk. The problem of this final project is focusing on the spare parts inventory for satisfy the demand based on the occurrence of damage spare part. Factor which considered is the customer classes. The difference is based on fill rate of each class of customers. Fill rate is the fraction of customer demand that is met through immediate stock availability, without backorders or lost sales. The purpose of this study is to minimize the total cost of inventory by observing the different customer classes. By using the FCFS queuing discipline, inventory model with METRIC theory can be solved by Lagrange multiplier method. Simulations with 5 customer classes performed in this study used 10 data of server mechine from PT. XYZ can minimize inventory costs up to 6.4% which 0.8% risk of backorder.*

**Keywords:** *spare part, fill rate, customer classes, multiplier Lagrange*

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## **KATA PENGANTAR**

Alhamdulillahirobbil'alalamiin, segala puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan limpahan rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul

### **“PENERAPAN METODE LAGRANGE MULTIPLIER UNTUK MEMINIMALKAN BIAYA PERSEDIAAN SUKU CADANG DENGAN PERBEDAAN KELAS PELANGGAN”**

sebagai salah satu syarat kelulusan Program Sarjana Jurusan Matematika FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya.

Tugas Akhir ini dapat diselesaikan dengan baik berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih dan penghargaan kepada:

1. Ketua Jurusan Matematika ITS yang telah memberikan dukungan dan motivasi selama perkuliahan hingga terselesaikannya Tugas Akhir ini.
2. Kaprodi S1 Jurusan Matematika dan sekretaris prodi S1 yang telah memberikan arahan akademik selama penulis kuliah di Jurusan Matematika FMIPA-ITS.
3. Ibu Valeriana Lukitosari, S.Si, MT sebagai dosen pembimbing yang telah memberikan motivasi dan pengarahan dalam penyelesaian Tugas Akhir ini.
4. Bapak Dr. Mahmud Yunus, M.Si, Ibu Endah Rohmati Merdika Putri, Ph.D, Ibu Dra. Nuri Wahyuningsih, M.Kes, Ibu Dra. Titik Mudjiati, M.Si selaku dosen penguji.

5. Bapak Drs. Soetrisno, MI.Kom sebagai dosen wali yang telah memberikan arahan akademik selama penulis kuliah di Jurusan Matematika FMIPA-ITS.
6. Bapak dan Ibu dosen serta para staf Jurusan Matematika ITS yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.
7. Para *masyayikh*, dan guru atas doa serta bimbingannya selama ini.
8. Kedua orang tua saya, Bapak Abdul Mufti dan Ibu Sumaina atas dukungan dan semangat yang telah diberikan.
9. Teman-teman saya Diva, Ain, Wawan, Ivan, Mufarrihah, Amina, Fika, Ina, Virga, Yenny, Ofi, Mimi, Airin, Jessica, Tara, Rozi dan seluruh teman-teman LAMBDA 2013 serta sahabat-sahabati PMII1011 yang saya sayangi yang telah membantu dan memotivasi saya.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan Tugas Akhir ini masih mempunyai banyak kekurangan. Kritik dan saran dari berbagai pihak yang bersifat membangun juga sangat diharapkan sebagai bahan perbaikan di masa yang akan datang.

Surabaya, Januari 2017

Penulis

## DAFTAR ISI

	Hal
LEMBAR PENGESAHAN .....	v
ABSTRAK .....	vii
ABSTRACT .....	ix
KATA PENGANTAR .....	xi
DAFTAR ISI .....	xiii
DAFTAR GAMBAR .....	xv
DAFTAR TABEL .....	xvii
DAFTAR LAMPIRAN .....	xix
DAFTAR SIMBOL .....	xxi
BAB I PENDAHULUAN .....	1
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	2
1.3 Batasan Masalah .....	2
1.4 Tujuan .....	3
1.5 Manfaat .....	3
1.6 Sistematika Penulisan .....	3
BAB II TINJAUAN PUSTAKA .....	5
2.1 Pengertian Suku Cadang .....	5
2.2 Persediaan .....	5
2.3 Biaya-biaya Persediaan .....	8
2.4 <i>Lead Time</i> .....	10
2.5 Teori METRIC .....	11
2.6 Distribusi Poisson .....	14
2.7 Teori Antrian .....	17
2.7.1 Unsur-unsur Dasar dari Model Antrian .....	17
2.7.2 Antrian dengan Gabungan Kedatangan dan Kepergian .....	18
2.8 Metode Pengali Lagrange .....	24
2.9 <i>Fill Rate</i> .....	26
BAB III METODE PENELITIAN .....	27

	Hal
BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN .....	31
4.1 Pembentukan Model Fungsi Objektif .....	31
4.2 Analisa Model .....	33
4.2.1 Analisa Critical Level.....	33
4.2.2 Relaksasi Lagrange.....	35
4.3 Optimalisasi dengan Pengali Lagrange.....	36
4.4 Simulasi .....	44
4.4.1 Uji Distribusi Permintaan .....	44
4.4.2 Menghitung Persediaan Minimal Suku Cadang.....	45
BAB V KESIMPULAN DAN SARAN .....	55
5.1 Kesimpulan.....	55
5.2 Saran.....	56
DAFTAR PUSTAKA.....	57
LAMPIRAN .....	59

## DAFTAR GAMBAR

	Hal
Gambar 2.1 Sistem inventori eselon .....	12
Gambar 2.2 Model persediaan suku cadang pada teori METRIC .....	13
Gambar 2.3 Sistem Antrian .....	19
Gambar 2.4 Diagram transisi untuk antrian $M/M/1/\infty$ .....	21
Gambar 2.5 Diagram transisi untuk teori antrian .....	22
Gambar 2.6 Diagram Alir Metode Penelitian .....	29

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*



## DAFTAR TABEL

	Hal
Tabel 4.1 Hasil uji distribusi Poisson permintaan suku cadang dengan uji Kolmogorov Smirnov .....	44
Tabel 4.2 Atribut Suku Cadang .....	45
Tabel 4.3 Hasil optimasi suku cadang dengan metode pengali Lagrange.....	51
Tabel 4.4 Nilai lambda dari 10 SKU di setiap kelas pelanggan .....	51

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## DAFTAR LAMPIRAN

	Hal
Lampiran A	Langkah-langkah pembagian kelas pelanggan.....59
Lampiran B	Data permintaan pelanggan terhadap 10 suku cadang .....61
Lampiran C	Uji Kolmogorov Smirnov distribusi permintaan dengan software EasyFit.....63
Lampiran D	Permintaan masing-masing kelas pelanggan .....69
Lampiran E	Hasil optimasi persediaan dengan software MATLAB .....71
Lampiran F	Biodata Penulis.....77

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## DAFTAR SIMBOL

$i$	: Indeks untuk suku cadang $i$
$j$	: Indeks untuk kelas pelanggan ke- $j$
$m_{i,j}$	: Permintaan terhadap suku cadang $i$ dari kelas pelanggan $j$
$m_i$	: Rata-rata permintaan suku cadang $i$
$M_j$	: Total permintaan dari kelas pelanggan $j$
$\beta_{j,obj}$	: Target <i>fill rate</i> kelas pelanggan $j$
$c_{i,j}$	: <i>critical level</i> suku cadang $i$ di kelas pelanggan $j$
$q_{i,c_{i,j}}$	: Peluang suku cadang $i$ di kelas pelanggan $j$ dalam antrian
$q_{i,0}$	: Peluang tidak ada stok dalam antrian
$c_i$	: <i>Basestock level</i> suku cadang $i$
$c$	: Total dari semua persediaan minimal yang harus ada
$\beta_j(c)$	: <i>Fill rate</i> semua suku cadang di kelas pelanggan $j$
$\beta_{i,j}(c_{i,j})$	: <i>Fill rate</i> dari kelas pelanggan $j$ terhadap suku cadang- $i$
$p_i$	: Harga beli dari setiap suku cadang $i$
$T_i$	: Waktu tunggu ( <i>lead time</i> ) pengisian ulang persediaan suku cadang $i$ kelas pelanggan $j$
$\lambda_j$	: Biaya <i>backorder</i> untuk kelas pelanggan $j$
$P$	: Fungsi objektif total biaya persediaan
$L(\lambda)$	: Fungsi Lagrange
$I_i$	: Fungsi dekomposisi untuk satu suku cadang

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## **BAB I**

### **PENDAHULUAN**

Pada bab ini dijelaskan mengenai latar belakang dari permasalahan yang dibahas pada tugas akhir ini, rumusan masalah yang muncul akibat latar belakang, batasan masalah, tujuan, manfaat dan sistematika penulisan yang diuraikan pada bagian akhir bab ini.

#### **1.1 Latar Belakang**

Seiring dengan majunya industrialisasi dan ketatnya kompetisi, sebuah perusahaan dengan segala jenis produknya dituntut untuk mampu dan tetap bertahan dan mampu bersaing. Persaingan tersebut tidak hanya terbatas pada persaingan harga saja tetapi juga kualitas dan *service*. Pada sebuah *supply chain* terdapat banyak pihak yang terlibat didalamnya, antara lain manufaktur, *supplier*, dan pelanggan [1]. Para pemain *supply chain* tersebut memiliki peran masing-masing yang saling terintegrasi.

Salah satu cara yang bisa dilakukan untuk memenangkan persaingan antara lain dengan memberikan *service* terbaik untuk pelanggan. Dalam hal ini, *service* atau layanan bisa berupa pemenuhan permintaan tepat waktu atau ketersediaan produk saat dibutuhkan pelanggan. Tujuan adanya manajemen persediaan suku cadang adalah untuk memenuhi semua permintaan pelanggan berdasarkan target *service level* dan meminimalkan jumlah permintaan yang tidak dapat dipenuhi. Ukuran banyaknya permintaan yang dapat dipenuhi dengan segera dari persediaan yang ada tanpa adanya *backorder* dan *lost sales* disebut *fill rate*.

*Fill rate* dapat diukur secara keseluruhan atau dapat diukur untuk masing-masing item suku cadang [2]. Dalam tugas akhir ini *fill rate* digunakan untuk membedakan masing-masing kelas

pelanggan. Permintaan di setiap kelas pelanggan memiliki *cost* yang berbeda jika permintaannya tidak dipenuhi oleh perusahaan.

Penelitian mengenai persediaan suku cadang telah dilakukan oleh beberapa peneliti terdahulu. Penelitian yang dilakukan oleh R.J.I Basten dan G.J. Van Houtum mengembangkan model multi-eselon untuk mengontrol persediaan suku cadang dan lebih fokus pada penggunaan pengiriman lateral dan darurat dan menghasilkan pengurangan biaya rata-rata lebih dari 3% dari biaya persediaan sebelumnya dengan menggunakan metode *Level Of Repair Analysis (LORA)* [3].

Selanjutnya, Engin Topan, Z. Pelin Bayindir dan Tarkan Tan membahas sistem persediaan suku cadang multi item yang bertujuan untuk mendapatkan persediaan minimal dengan pemesanan tetap dengan kendala waktu respon individu yang menunjukkan bahwa metode *batch ordering* yang digunakan dapat memecahkan masalah secara optimal [4].

Tugas akhir ini dilakukan untuk meneliti bagaimana meminimalkan investasi persediaan suku cadang dengan mempertimbangkan perbedaan kelas pelanggan berdasarkan *fill rate* menggunakan metode pengali Lagrange. Tujuannya untuk meminimalkan investasi persediaan suku cadang.

## 1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada tugas akhir ini adalah :

1. Bagaimana model persediaan suku cadang dengan perbedaan kelas pelanggan.
2. Bagaimana pengaruh perbedaan kelas pelanggan dalam meminimalkan total biaya persediaan suku cadang.

## 1.3 Batasan Masalah

Ruang lingkup permasalahan yang akan dibahas dalam tugas akhir ini adalah perbedaan kelas pelanggan yang dikelompokkan berdasarkan jumlah permintaan dalam setahun. Permintaan pelanggan berdasarkan terjadinya kerusakan pada



salah satu suku cadang. Suku cadang yang digunakan dalam tugas akhir ini adalah 10 suku cadang utama dari suatu mesin server dari PT. XYZ. Data yang digunakan berdistribusi Poisson.

## 1.4 Tujuan

Tujuan dari tugas akhir ini adalah sebagai berikut :

1. Membentuk model persediaan suku cadang dengan perbedaan kelas pelanggan.
2. Meminimalkan total biaya persediaan suku cadang.

## 1.5 Manfaat

Adapun manfaat dari penulisan tugas akhir ini adalah memperoleh model persediaan suku cadang dengan perbedaan kelas pelanggan untuk meminimalkan total biaya persediaan suku cadang dengan menerapkan metode multiplier Lagrange.

## 1.6 Sistematika Penulisan

Untuk memberikan gambaran mengenai keseluruhan isi tugas akhir ini, maka akan dikemukakan sistematika penulisan dalam tugas akhir ini sebagai berikut:

### 1. BAB I PENDAHULUAN

Bab ini menjelaskan tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat dan sistematika penulisan hasil tugas akhir.

### 2. BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dijelaskan tentang pengertian suku cadang, definisi persediaan, sistem pengendalian persediaan, model pengendalian persediaan probabilistik, distribusi Poisson, *lead time*, *fill rate* dan teori METRIC.

### 3. BAB III METODE PENELITIAN

Bab ini menjelaskan tentang tahapan-tahapan dalam proses menyelesaikan masalah dan mencapai tujuan tugas akhir.

#### 4. BAB IV PEMBAHASAN

Bab ini menjelaskan mengenai penentuan model, penerapan teori antrian, *fill rate*, proses minimalisasi dengan relaksasi Langrange, dekomposisi Lagrange, pengujian permintaan berdistribusi Poisson, simulasi numerik.

#### 5. BAB V PENUTUP

Bab ini menjelaskan kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan dan saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

## **BAB II**

### **TINJAUAN PUSTAKA**

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai pengertian suku cadang, definisi persediaan, sistem pengendalian persediaan, distribusi poisson, *lead time*, *fill rate* dan teori METRIC.

#### **2.1 Pengertian Suku Cadang**

Suku cadang mesin atau lebih sering disebut dengan *spare part* merupakan suatu barang yang terdiri dari berbagai komponen mesin yang membentuk satu kesatuan dan mempunyai fungsi tertentu. Setiap suku cadang mempunyai fungsi tersendiri dan dapat terkait atau terpisah dengan suku cadang lainnya. Menurut bisa tidaknya diperbaiki, suku cadang dibagi menjadi 3 macam [5], yaitu:

1. *Non Repairable*

Suatu suku cadang yang tidak dapat diperbaiki setelah mengalami satu kali kerusakan.

2. *Partially Repairable*

Dalam suatu suku cadang terdapat bagian yang dapat diperbaiki atau harus diganti apabila terjadi kerusakan untuk mengembalikan pada performa semula.

3. *Fully Repairable*

Ketika suatu suku cadang mengalami kerusakan maka suku cadang tersebut dapat diperbaiki sampai kriteria tertentu.

#### **2.2 Persediaan**

Persediaan (*inventory*) merupakan bahan atau barang yang disimpan yang akan digunakan untuk memenuhi tujuan tertentu, misalnya untuk digunakan dalam proses produksi atau perakitan, untuk dijual kembali, atau untuk suku cadang dari suatu peralatan atau mesin.

Penyebab timbulnya persediaan adalah sebagai berikut [6]:

1. Mekanisme pemenuhan atas permintaan. Permintaan terhadap suatu barang tidak dapat dipenuhi seketika apabila barang tersebut tidak tersedia sebelumnya. Untuk menyiapkan barang ini diperlukan waktu untuk pembuatan dan pengiriman, maka adanya persediaan merupakan hal yang sulit dihindari.
2. Keinginan untuk meredam ketidakpastian. Ketidakpastian terjadi akibat permintaan yang bervariasi dan tidak pasti dalam jumlah maupun waktu kedatangan, waktu pembuatan yang cenderung tidak konstan antara satu produk dengan produk berikutnya, waktu tunggu (*lead time*) yang cenderung tidak pasti karena banyak faktor yang tak dapat dikendalikan. Ketidakpastian ini dapat diredam dengan mengadakan persediaan.
3. Keinginan melakukan spekulasi yang bertujuan untuk mendapatkan keuntungan besar dari kenaikan harga dimasa mendatang.

Barang persediaan dapat dibagi atas beberapa jenis atau klasifikasi. Sekurang-kurangnya ada 6 klasifikasi utama, yaitu [6]:

1. Persediaan bahan baku (*raw materials*), yaitu bahan mentah yang belum diolah, yang akan diolah menjadi barang jadi, sebagai hasil utama dari perusahaan yang bersangkutan.
2. Persediaan barang setengah jadi (*semi finished products*), yaitu hasil olahan bahan mentah sebelum menjadi barang jadi, yang sebagian akan diolah menjadi barang jadi, dan sebagian kadang-kadang dijual apa adanya untuk menjadi bahan baku perusahaan lain.
3. Persediaan barang jadi (*finished products*), yaitu barang yang sudah selesai diproduksi atau diolah, yang merupakan hasil utama perusahaan yang bersangkutan dan siap untuk dipasarkan atau dijual.

4. Persediaan barang umum dan suku cadang (*general materials and spare part*), yaitu segala jenis barang atau suku cadang yang digunakan untuk operasi menjalankan perusahaan/pabrik dan untuk memelihara peralatan yang digunakan. Sering kali barang persediaan jenis ini disebut juga barang pemeliharaan, perbaikan, dan operasi, atau *MRO materials (maintenance, repair and operation)*.
5. Persediaan barang untuk proyek (*work in progress*), yaitu barang-barang yang ditumpuk menunggu pemasangan dalam suatu proyek baru.
6. Persediaan barang dagangan (*commodities*), yaitu barang yang dibeli, sudah merupakan barang jadi dan disimpan di gudang menunggu penjualan kembali dengan keuntungan tertentu.

Pengendalian persediaan (*inventory control*) adalah kegiatan yang berhubungan dengan perencanaan, pelaksanaan, dan pengawasan penentuan kebutuhan material sedemikian rupa sehingga kebutuhan operasi dapat dipenuhi pada waktunya dan investasi persediaan dapat ditekan secara optimal. Sistem pengendalian persediaan dapat didefinisikan sebagai serangkaian kebijakan pengendalian untuk menentukan tingkat persediaan yang harus dijaga, kapan pesanan untuk menambah persediaan harus dilakukan dan berapa besar pesanan harus diadakan. Sistem ini menentukan dan menjamin tersedianya persediaan yang tepat dalam kuantitas dan waktu yang tepat.

Hal yang sangat penting dalam pengendalian persediaan (*inventory control*) adalah mengetahui apa yang terjadi pada barang pesanan konsumen (*customer's order*) ketika persediaan tidak tersedia untuk sementara (*stockout*). Ada dua kasus ekstrim yaitu sebagai berikut [5]:

1. *Backorder*

Pada kasus *backorder*, penjualan tidak hilang tetapi terjadi keterlambatan pengiriman akibat dari ketiadaan *stock*

(persediaan). Sehingga suatu perusahaan akan mengadakan pemesanan darurat untuk memperoleh barang atau konsumen akan dilayani setelah pesanan mendatang tiba (*replenishment*). Pada kasus *backorder* mengakibatkan terjadinya biaya pemesanan yang terburu-buru serta biaya ekstra dalam penanganan, pengiriman dan pengemasan barang. Situasi seperti ini biasanya terjadi pada hubungan perdagangan besar dengan pengecer dari beberapa sistem distribusi.

## 2. *Lost Sales*

Pada kasus *lost sales*, setiap permintaan yang tidak tersedia akan hilang. Hal ini dikarenakan konsumen akan pergi kemanapun untuk memenuhi kebutuhannya dan kemungkinan akan dipenuhi oleh kompetitor. Pada *lost sales*, biaya kekurangan barang (*stockout cost*) mencakup kehilangan keuntungan pada penjualan untuk beberapa kerugian yang tak tentu dan kehilangan kepercayaan konsumen, karena kemungkinan konsumen tidak akan kembali untuk mendapatkan barang yang lain dimasa mendatang. Situasi ini sering terjadi pada hubungan pengecer dengan konsumen dari sistem distribusi.

## 2.3 Biaya-biaya Persediaan

Biaya-biaya persediaan ini timbul karena adanya rencana persediaan dalam perusahaan untuk memperlancar kegiatan produksi. Biaya-biaya akibat pengelolaan persediaan dibedakan menjadi enam, yaitu:

### 1. *Cost item* (Biaya Pembelian)

Harga barang per unit yang timbul karena adanya harga pembelian barang. Biaya pembelian adalah harga per item apabila dibeli dari pihak luar, atau biaya produksi per item apabila di produksi dalam perusahaan atau dapat dikatakan pula bahwa biaya pembelian adalah semua biaya yang digunakan

untuk membeli suku cadang. Penetapan dari biaya pembelian ini tergantung dari pihak penjualan barang atau bahan sehingga pihak pembeli hanya bisa mengikuti fluktuasi harga barang yang ditetapkan oleh pihak penjual.

2. **Ordering cost** (Biaya Pemesanan)

Biaya pemesanan yaitu biaya yang dikeluarkan berkenaan dengan adanya pemesanan barang atau bahan. Yang termasuk dalam bentuk biaya ini meliputi biaya administrasi, biaya pengiriman/pengangkutan dan bongkar muat pesanan, biaya penempatan order, dan biaya pemeriksaan. Besar kecilnya biaya pemesanan sangat tergantung pada frekuensi pesanan, semakin sering memesan barang maka biaya yang dikeluarkan akan semakin besar dan sebaliknya. Biaya pemesanan tidak naik bila kuantitas pesanan sekali pesan bertambah besar, sehingga semakin banyak item komponen dalam sekali pesan maka biaya pesan per item akan turun. Semakin sedikit item barang dan sedikit jumlah dalam sekali pesan maka akan semakin besar biaya pesan per item.

3. **Holding cost** (Biaya Penyimpanan)

Biaya penyimpanan adalah biaya yang dikeluarkan berkenaan dengan adanya kegiatan penyimpanan barang/bahan yang sudah dibeli atau dapat pula dikatakan bahwa biaya simpan adalah semua biaya yang timbul akibat penyimpanan barang atau bahan di gudang. Besar kecilnya biaya simpan sangat tergantung pada jumlah rata-rata barang yang disimpan di gudang. Semakin banyak persediaan, maka biaya simpan juga akan besar dan sebaliknya. Bila diperhatikan kedua jenis biaya persediaan barang di atas, maka diketahui bahwa baik biaya pesan maupun biaya simpan merupakan biaya variabel atau biaya yang besarnya berubah-ubah tergantung pada frekuensi pemesanan dan volume persediaan.

4. ***Stockout cost*** (Biaya Kekurangan Persediaan)

Biaya kekurangan persediaan, yaitu biaya yang digunakan sehubungan dengan adanya persediaan yang kecil dari jumlah yang dikeluarkan. Disamping itu, biaya ini timbul akibat keterlambatan pengiriman pesanan dari pemasok. Biaya ini dapat pula dikatakan sebagai biaya yang ditimbulkan sebagai akibat terjadinya persediaan yang lebih kecil dari jumlah yang diperlukan atau biaya yang timbul akibat persediaan di gudang tidak dapat mencukupi permintaan bahan.

5. **Biaya resiko kerusakan dan kehilangan persediaan**, yaitu biaya yang timbul akibat barang persediaan telah kadaluarsa atau rusak akibat kondisi tertentu dan kehilangan persediaan.

6. ***Safety stock cost*** (Biaya Persediaan Pengaman)

Biaya persediaan pengaman, yaitu biaya yang dikeluarkan sehubungan dengan adanya persediaan pengaman yang berfungsi sebagai persediaan tambahan untuk melindungi dan menjaga kemungkinan terjadinya kekurangan persediaan atau biaya yang dikeluarkan sehubungan dengan adanya pesanan permintaan yang datang terlalu awal.

## 2.4 *Lead Time*

Secara umum *lead time* mengukur jeda waktu yang dibutuhkan antara proses pemesanan suku cadang dan penerimaan suku cadang. *Lead time* sangat mempengaruhi tingkat stok. *Lead time* ini perlu diperhatikan karena sangat erat kaitannya dengan penentuan *reorder point*. Dengan demikian *lead time* yang tepat maka perusahaan akan dapat membeli pada saat yang tepat pula, sehingga resiko *overstock* atau *stockout* dapat ditekan seminimal mungkin. *Lead time* antar suku cadang satu dengan suku cadang yang lainnya berbeda-beda, sehingga ditetapkan sesuai dengan kondisi yang ada pada perusahaan [1].



## 2.5 Teori METRIC

*Multi Echelon Technique for Recoverable Item Control* (METRIC) merupakan teori yang terdiri dari seluruh rangkaian model *multi-item* dan penyelesaian yang sesuai untuk jaringan distribusi suku cadang. Suku cadang yang pertama kali dipasang pada mesin, biasanya dapat diperbaiki dan harganya cenderung mahal. Oleh karena itu, dilakukan perbaikan oleh distributor untuk tingkat kerusakan tertentu. Perbaikan yang dilakukan oleh distributor merupakan permasalahan optimasi bersama dalam matematika. Ternyata, masalah persediaan seperti ini dapat diselesaikan dengan menerapkan teori antrian. Sistem persediaan *multi echelon* dapat dilihat pada gambar 2.1.

Teori METRIC dapat menghitung jumlah persediaan optimal setiap item yang berada pada sistem. Fungsi objektif yang dibentuk dari teori ini merupakan jumlahan dari *backorder* di setiap level pada tingkat distributor. Minimalisasi *backorder* pada level distributor setara dengan memaksimalkan ketersediaan suku cadang.

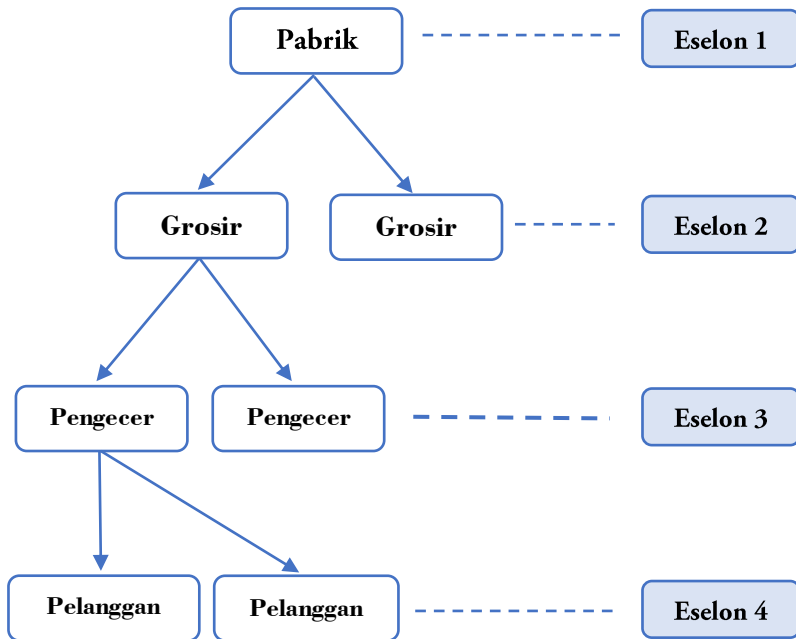
Asumsi-asumsi dalam model METRIC.

1. Keputusan apakah suatu perbaikan oleh distributor tidak tergantung pada tingkat stok atau beban kerja. Asumsinya bahwa untuk tingkat kerusakan tertentu pada setiap item dapat diperbaiki oleh distributor, karena mereka memiliki alat uji, personil, dan sumber daya lainnya. Apabila kerusakan pada suku cadang memungkinkan untuk diperbaiki, maka perbaikan dilakukan oleh distributor. Jika suku cadang yang diperlukan tidak tersedia, maka penggantian suku cadang tersebut diperoleh dari depot (pabrik).
2. Persediaan pada distributor disupply oleh depot, bukan dari lateral *supplier* yang lain. Hal ini sesuai untuk menetapkan tingkat stok, karena jumlah pengiriman lateral biasanya kecil.

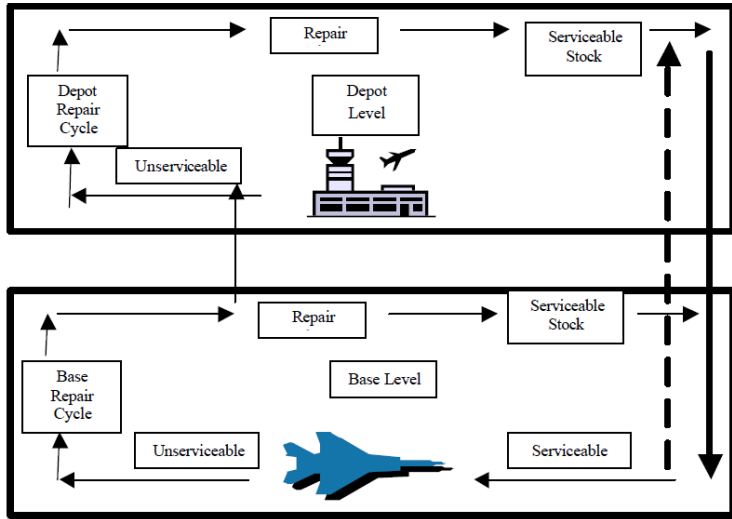
Ketika pasokan lateral diabaikan, biaya transportasi antara depot dan *supplier* tidak diperlukan, karena total biaya transportasi bukan fungsi dari kebijakan *Stockage*.

3. Model persediaan  $(s - 1, s)$  sesuai untuk setiap item pada setiap eselon.
4. *Lead time* perbaikan dan permintaan untuk setiap item adalah independen.

Dalam teori METRIC biaya pemesanan dan biaya simpan tidak diperlukan, karena diasumsikan pengisian satu-untuk-satu dan ini mendefinisikan jumlah pesanan dan rata-rata stok yang ada. Biaya perbaikan juga tidak diperlukan, karena diasumsikan bahwa jika item dapat diperbaiki, biaya perbaikan kurang dari biaya pembelian. Model persediaan suku cadang pada teori METRIC dapat dilihat pada Gambar 2.2 [7].



Gambar 2.1: Sistem persediaan eselon



Gambar 2.2: Model persediaan suku cadang pada teori METRIC [7]

Untuk masing-masing suku cadang  $i$  dan kelas pelanggan  $j$  permintaan diasumsikan berdistribusi Poisson dengan  $m_{i,j} \geq 0$ . Asumsi ini sudah umum dalam teori METRIC. Total permintaan dari kelas pelanggan  $j$  adalah jumlahan dari permintaan terhadap semua suku cadang yang ada, yaitu  $M_j = m_{1,j} + m_{2,j} + \dots + m_{I,j}$  dapat ditulis sebagai berikut:

$$M_j = \sum_{i=1}^I m_{i,j}, \quad M_j > 0, \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (2.1)$$

Stok suku cadang yang disimpan di gudang di kontrol dengan sistem pemeriksaan terus-menerus (*continuous review*) terhadap banyaknya suku cadang minimal yang harus tersedia (*critical level*). Artinya, untuk setiap suku cadang  $i$  banyaknya stok dikontrol berdasarkan persediaan dasar (*basestock policy*) dengan *basestock level*  $c_i$  dan persediaan minimal yang harus tersedia

(critical level) untuk suku cadang  $i$  dari kelas pelanggan  $j$  dinotasikan dengan  $c_{i,j}$  ( $\in \mathbb{N}$ ).

Permintaan dari setiap suku cadang adalah independen dan diasumsikan berdistribusi Poisson, maka *fill rate* dari kelas pelanggan  $\beta_j(c)$  adalah jumlahan dari *fill rate* masing-masing suku cadang dengan fraksi  $\frac{m_{i,j}}{M_j}$  yaitu:

$$\beta_j(c) = \sum_{i=1}^I \frac{m_{i,j}}{M_j} \beta_{i,j}(c_{i,j}), \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (2.2)$$

dimana  $\beta_{i,j}(c_{i,j})$  adalah *fill rate* dari suku cadang  $i$ , kelas pelanggan  $j$ .

**Teorema Palm's.** Jika permintaan untuk suatu barang berdistribusi Poisson dengan mean per tahun adalah  $m$  dan waktu perbaikan untuk masing-masing barang distribusinya independen dan identik dengan rata-rata  $T$  tahun, maka distribusi probabilitas *steady-state* untuk sejumlah barang yang dalam perbaikan berdistribusi Poisson dengan mean  $mT$  [7]. ■

Apabila  $m_{i,j}$  adalah rata-rata permintaan item  $i$  di kelas pelanggan  $j$  pertahun dan  $T_i$  adalah rata-rata *lead time* dalam tahun maka besarnya *pipeline stock* adalah  $\rho = m_{i,j}T_i$  digunakan untuk menghitung ekspektasi *backorder* [7].

## 2.6 Distribusi Poisson

Percobaan yang menghasilkan nilai-nilai bagi suatu peubah acak  $X$ , yaitu banyaknya hasil percobaan yang terjadi selama suatu selang waktu tertentu atau di suatu daerah tertentu, sering disebut percobaan Poisson. Percobaan Poisson memiliki ciri-ciri sebagai berikut [8]:

1. Banyaknya hasil percobaan yang terjadi dalam suatu selang waktu atau suatu daerah tertentu, tidak bergantung pada banyaknya hasil percobaan yang terjadi pada selang waktu atau daerah lain yang terpisah.
2. Peluang terjadinya suatu hasil percobaan selama selang waktu yang singkat sekali atau dalam suatu daerah yang kecil, sebanding dengan panjang selang waktu tersebut atau besarnya daerah tersebut, dan tidak bergantung pada banyaknya hasil percobaan yang terjadi di luar selang waktu atau daerah tersebut.
3. Peluang bahwa lebih dari satu hasil percobaan akan terjadi dalam selang waktu yang singkat tersebut atau dalam daerah yang kecil tersebut, dapat diabaikan.

Bilangan  $X$  yang menyatakan banyaknya hasil percobaan dalam suatu percobaan Poisson disebut peubah acak Poisson dan sebaran peluangnya disebut sebaran Poisson. Karena nilai-nilai peluangnya hanya bergantung pada  $\mu$ , yaitu rata-rata banyaknya hasil percobaan yang terjadi selama selang waktu atau daerah yang diberikan, maka dilambangkan dengan  $p(x; \mu)$ .

### ***Definisi 2.1***

Sebaran peluang bagi peubah acak Poisson  $X$ , yang menyatakan banyaknya hasil percobaan yang terjadi selama suatu selang waktu atau daerah tertentu, adalah:

$$p(x; \mu) = \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!}, \text{ untuk } x = 1, 2, \dots$$

Sedangkan dalam hal ini  $\mu$  adalah rata-rata banyaknya hasil percobaan yang terjadi selama suatu selang waktu atau daerah yang dinyatakan. ■

Parameter pada distribusi Poisson yaitu [9] MGF (*Moment Generating Function*) yang disimbolkan dengan  $M(t)$ :

$$\begin{aligned}
 M(t) &= \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} f(x) \\
 &= \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \\
 &= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \frac{\lambda^x}{x!} \\
 &= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(e^t \lambda)^x}{x!} \\
 &= e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} \\
 &= e^{\lambda(e^t - 1)}
 \end{aligned}$$

dimana,

ekpektasi dari  $X$  adalah  $E(X) = M'(0)$

$$M'(t) = \frac{d}{dt} (e^{\lambda(e^t - 1)}) = \lambda e^t e^{\lambda(e^t - 1)}$$

$$M'(0) = \lambda e^0 e^{\lambda(e^0 - 1)} = \lambda e^0 e^{\lambda \cdot 0} = \lambda$$

diperoleh  $E(X) = \lambda$ . Nilai  $E(X)$  sama dengan rata-rata sehingga nilai  $\lambda = \mu$ .

Nilai dari variansi  $X$  yaitu  $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ . Nilai  $E(X^2)$  dapat diperoleh dari  $M''(0)$  yaitu:

$$\begin{aligned}
 M''(t) &= \frac{d}{dt} (\lambda e^t e^{\lambda(e^t - 1)}) \\
 &= \lambda e^t e^{\lambda(e^t - 1)} + (\lambda e^t)^2 e^{\lambda(e^t - 1)}
 \end{aligned}$$

sehingga,

$$\begin{aligned}
 E(X^2) &= M''(0) \\
 &= \lambda e^0 e^{\lambda(e^0 - 1)} + (\lambda e^0)^2 e^{\lambda(e^0 - 1)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda \cdot 1 \cdot e^{\lambda \cdot 0} + (\lambda \cdot 1)^2 e^{\lambda \cdot 0} \\
&= \lambda + \lambda^2
\end{aligned}$$

maka diperoleh

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \lambda^2 + \lambda - (\lambda)^2 = \lambda$$

## 2.7 Teori Antrian

Dari sudut pandang model antrian, situasi antrian diciptakan dengan cara berikut ini. Ketika pelanggan tiba di suatu sarana pelayanan, para pelanggan bergabung membentuk antrian. Pelayan (*server*) memilih seorang pelanggan dari antrian untuk memulai pelayanan. Setelah pelayanan selesai, proses memilih pelanggan yang sedang menunggu diulangi. Diasumsikan tidak ada waktu yang hilang antara selesainya pelayanan dengan diterimanya pelanggan baru pada *server* tersebut [10].

### 2.7.1 Unsur-unsur Dasar dari Model Antrian

Pelaku-pelaku utama dalam antrian adalah pelanggan (*customer*) dan pelayan (*server*). Dalam model antrian, interaksi antara *customer* dan *server* hanya pada periode waktu yang diperoleh pelanggan untuk menyelesaikan sebuah pelayanan. Jadi, dari sudut pandang kedatangan pelanggan, hal yang menarik adalah interval waktu yang memisahkan kedatangan pelanggan secara berturut-turut. Sementara dari sudut pandang *server*, hal yang menarik adalah waktu pelayanan per pelanggan.

Dalam model antrian, kedatangan pelanggan dan waktu pelayanan diringkas dalam bentuk distribusi probabilitas yang umumnya disebut sebagai distribusi kedatangan (*arrival distribution*) dan distribusi waktu pelayanan (*service time distribution*). Kedua distribusi ini mewakili situasi dimana

pelanggan tiba dan dilayani secara individual. Unsur-unsur dasar dari model antrian bergantung pada faktor-faktor berikut [10]:

1. Distribusi kedatangan.
2. Distribusi waktu pelayanan.
3. Rancangan sarana pelayanan (seri, paralel, atau jaringan)
4. Disiplin layanan (FCFS, LCFS, SIRO) dan prioritas layanan.
5. Ukuran antrian (terhingga atau tidak terhingga).
6. Sumber pemanggilan (terhingga atau tidak terhingga).
7. Perilaku pelanggan (perpindahan, penolakan atau pembatalan).

### 2.7.2 Antrian dengan Gabungan Kedatangan dan Kepergian

Pada subbab ini akan dibahas situasi antrian yang menggabungkan proses kedatangan dengan kepergian. Apabila dalam suatu antrian terdiri dari  $s$  server yang disusun secara paralel sehingga  $s$  pelanggan dapat dilayani secara bersamaan. Notasi yang biasa digunakan untuk meringkas karakteristik utama dari antrian paralel dibakukan dalam format berikut [10]:

$$(a/b/c):(d/e/f)$$

dimana simbol-simbol  $a, b, c, e, f, g$  adalah unsur-unsur dasar dari model ini dalah sebagai berikut:

- $a$  : distribusi kedatangan
- $b$  : distribusi waktu pelayanan (waktu keberangkatan)
- $c$  : jumlah pelayanan paralel ( $s = 1, 2, \dots$ )
- $d$  : peraturan pelayanan (misalnya, FCFS, LCFS, SIRO)
- $e$  : jumlah maksimum yang diizinkan dalam sistem (dalam antrian + dalam layanan)
- $f$  : ukuran sumber pemanggilan



Notasi baku tersebut mengganti simbol  $a$  dan  $b$  untuk kedatangan dan keberangkatan dengan kode sebagai berikut:

$M$  : distribusi kedatangan atau keberangkatan Poisson.

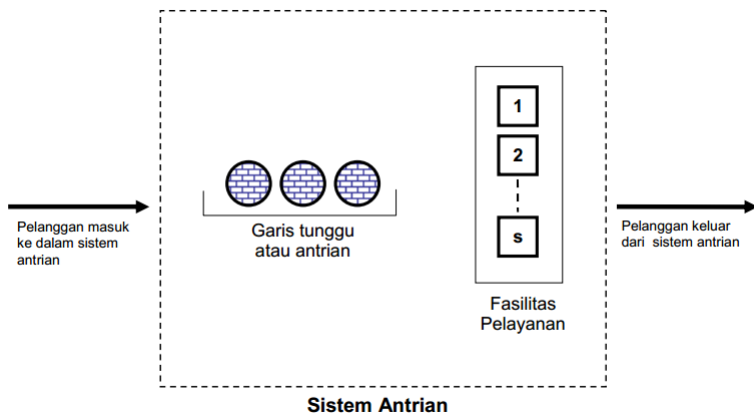
$D$  : waktu antar-kedatangan atau waktu pelayanan yang konstan atau deterministik.

$E_k$  : distribusi Erlangian atau gamma dari distribusi antar-kedatangan atau waktu pelayanan dengan parameter  $k$ .

$GI$  : distribusi independen umum dari kedatangan (atau waktu antar-kedatangan)

$G$  : distribusi umum dari keberangkatan (atau waktu pelayanan).

Notasi  $(a/b/c)$  dikenal dengan notasi Kendall. Tujuan dari analisa situasi antrian adalah untuk mengembangkan ukuran kinerja sistem dan mengevaluasi sistem. Analisa sistem berdasarkan kondisi transien atau *steady-state*. Kondisi transien berlaku ketika perilaku sistem terus bergantung pada waktu. Antrian dengan gabungan kedatangan dan keberangkatan dimulai berdasarkan kondisi transien dan secara bertahap mencapai kondisi *steady-state*.



Gambar 2.3: Sistem antrian

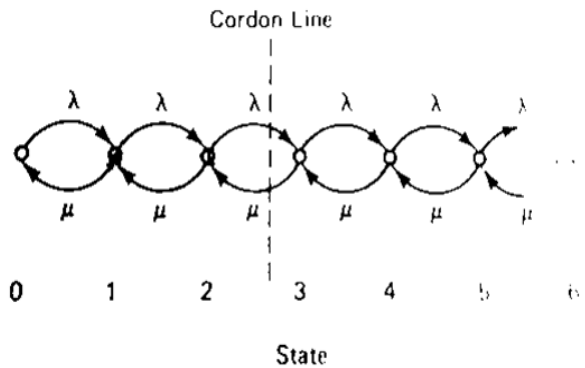
Model antrian yang digunakan dalam tugas akhir ini adalah disiplin antrian *First Come First Served* (FCFS). Model antrian adalah model probabilistik karena unsur-unsur tertentu proses antrian yang dimasukkan dalam model adalah variabel random yang sering digambarkan dengan distribusi probabilitas. Asumsi yang biasa digunakan dalam distribusi kedatangan adalah distribusi Poisson.

Model antrian dengan *single chanel single server* (M/M/1/∞) dimana M pertama merupakan rata-rata kedatangan yang mengikuti distribusi probabilitas Poisson, M kedua tingkat pelayanan yang mengikuti distribusi probabilitas eksponensial, 1 merupakan jumlah fasilitas pelayanan dalam sistem atau satu saluran dan kapasitas pelayanan yang tidak berhingga dengan jumlah antrian yang tidak terbatas. Asumsi yang digunakan adalah populasi input tidak terbatas, distribusi kedatangan mengikuti distribusi Poisson, disiplin pelayanan mengikuti pedoman FSFC, fasilitas pelayanan terdiri dari saluran tunggal, distribusi pelayanan mengikuti distribusi eksponensial, kapasitas sistem diasumsikan tidak terbatas dan tidak ada penolakan.

Didefinisikan  $p_n$  adalah probabilitas keadaan tetap (*steady state*) dimana didalam sistem terdapat  $n$  pelanggan. Untuk memperoleh sistem yang berada pada keadaan *steady state* transisi *rate in* harus sama dengan transisi *rate out* untuk setiap *state*. Kondisi ini mendefinisikan persamaan kesetimbangan dan merupakan metode untuk menentukan probabilitas *state*.

Persamaan setimbang di atas memiliki bentuk yang sama untuk semua *state* kecuali pada *state* 0. Hal ini merupakan pengecualian karena tidak mungkin terjadi transisi dari *state* -1 ke *state* 0. Tidak ada *state* -1. Persamaan yang setimbang untuk antrian M/M/1/∞ yaitu [11]:

<i>state</i>	<i>rate in = rate out</i>
0	$\mu p_1 = \lambda p_0$
1	$\lambda p_0 + \mu p_2 = \lambda p_1 + \mu p_1$
2	$\lambda p_1 + \mu p_3 = \lambda p_2 + \mu p_2$
$\vdots$	
n	$\lambda p_{n-1} + \mu p_{n+1} = \lambda p_n + \mu p_n$



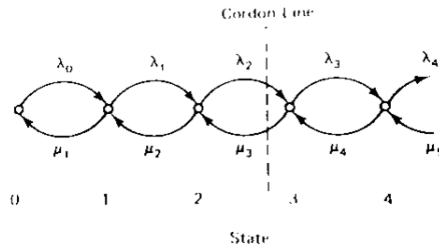
Gambar 2.4: Diagram transisi untuk antrian M/M/1/∞

Cara yang lebih mudah untuk membentuk persamaan yang setimbang yaitu untuk setiap cordon baris ditarik pada diagram transisi, tingkat transisi harus sama di kedua arah yang melintasi garis yaitu:

<i>line</i>	<i>rate in = rate out</i>
0,1	$\mu p_1 = \lambda p_0$
1,2	$\mu p_2 = \lambda p_1$
2,3	$\mu p_3 = \lambda p_2$
$\vdots$	
n, n+1	$\mu p_{n+1} = \lambda p_n$

Apabila didefinisikan  $\lambda_n$  adalah rata-rata kedatangan pelanggan ketika *state* sama dengan  $n$  dan  $\mu$  adalah rata-rata pelayanan ketika *state* sama dengan  $n$ . Jika kita asumsikan distribusi kedatangan mengikuti distribusi Poisson dan waktu pelayanan berdistribusi eksponensial dan independen, maka persamaan setimbangnya adalah:

<i>line</i>	<i>rate in = rate out</i>	
0,1	$\mu_1 p_1 = \lambda_0 p_0$	
1,2	$\mu_2 p_2 = \lambda_1 p_1$	
2,3	$\mu_3 p_3 = \lambda_2 p_2$	
$\vdots$		
$n, n+1$	$\mu_{n+1} p_{n+1} = \lambda_n p_n$	(2.3)



Gambar 2.5: Diagram transisi untuk teori antrian eksponensial secara umum

dari persamaan (2.3) diperoleh:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0 \\
 p_2 &= \frac{\lambda_1}{\mu_2} p_1 = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} p_0 \\
 p_3 &= \frac{\lambda_2}{\mu_3} p_2 = \frac{\lambda_2 \lambda_1 \lambda_0}{\mu_3 \mu_2 \mu_1} p_0
 \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$p_{n+1} = \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}} p_n = \frac{\lambda_n \lambda_{n-1} \dots \lambda_0}{\mu_{n+1} \mu_n \dots \mu_1} p_0 \quad (2.4)$$

Diasumsikan bahwa laju kedatangan tidak bergantung pada jumlah dalam sistem tersebut, yaitu  $\lambda_n = \lambda$  untuk semua  $n$ . Demikian pula pelayanan tunggal dalam sistem tersebut menyelesaikan pelayanan dengan kecepatan konstan, yaitu  $\mu_n = \mu$  untuk semua  $n$ . Akibatnya, model ini memiliki kedatangan dan keberangkatan Poisson dengan mean  $\lambda$  dan  $\mu$  dengan mendefinisikan  $\rho = \lambda/\mu$  maka persamaa (2.4) menjadi:

$$p_n = \rho^n p_0 \quad (2.5)$$

Karena  $p_n$  merupakan suatu probabilitas, maka:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n p_0 = 1$$

diperoleh

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n} = \frac{1}{1 + \rho + \rho^2 + \dots} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{1 - \rho}} \\ &= 1 - \rho \end{aligned}$$

dengan  $|\rho| < 1$ .

Jika sistem antrian terdiri dari  $m$  server yang bekerja secara paralel maka  $\lambda_n = \lambda$  dan  $\mu_n = n\mu$  untuk  $n = 1, 2, \dots, m$  dengan mensubstitusi  $\lambda_n = \lambda$  dan  $\mu_n = n\mu$  ke persamaan (2.4) yaitu:

$$p_{n+1} = \frac{\lambda_n \lambda_{n-1} \dots \lambda_0}{\mu_{n+1} \mu_n \dots \mu_1} p_0$$

$$\begin{aligned}
p_n &= \frac{\lambda_{n-1} \dots \lambda_0}{\mu_n \dots \mu_1} p_0 \\
&= \frac{\lambda \dots \lambda}{(n\mu)((n-1)\mu) \dots (2\mu)(1\mu)} p_0 \\
&= \frac{\lambda^n}{(n(n-1) \dots 2.1)\mu^n} p_0 \\
&= \frac{\lambda^n}{n! \mu^n} p_0
\end{aligned} \tag{2.6}$$

karena  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$  maka persamaan (2.6) menjadi

$$p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0$$

## 2.8 Metode Pengali Lagrange

Metode Lagrange merupakan suatu metode yang digunakan untuk menyelesaikan fungsi objektif dari suatu permasalahan yang langsung dikaitkan dengan fungsi kendalanya. Metode pengali Lagrange dengan kondisi Kuhn-Tucker digunakan untuk meminimumkan suatu fungsi  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  dengan kendala pertidaksamaan  $g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq a$  dan kedua fungsi tersebut bersifat kontinu dan difrensiabel menjadi fungsi minimum sederhana tanpa kendala:

$$h(x_1, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda(g(x_1, \dots, x_n) - a) \tag{2.7}$$

dengan  $\lambda$  tidak bergantung pada  $x$  [12] adalah pengali Lagrange (*multiplier Lagrange*) dan  $a$  adalah suatu konstanta nonnegatif.

Untuk meminimumkan fungsi tanpa kendala  $h = f + \lambda(g - a)$ , kondisi Kuhn-Tucker untuk fungsi dengan suatu kendala pertidaksamaan harus memenuhi

$$\frac{\partial h}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{\partial g}{\partial x_j} = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \lambda} = g - a = 0 \quad (2.9)$$

dengan  $j = 1, 2, \dots, n$ . nilai minimum dari  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan untuk  $x_j$  dan  $\lambda$  maka setiap penyelesaian dari sistem persamaan ini adalah suatu nilai kritis dari fungsi  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  [13].

Optimalisasi total investasi persediaan adalah masalah optimasi bilangan bulat nonlinier. Oleh karena itu, metode yang paling memungkinkan untuk optimalisasi total investasi persediaan dalam kasus ini yaitu dengan metode pengali Lagrange. Pada metode ini, suatu batasan direlaksasi Lagrange, fungsi relaksasi Lagrange untuk persediaan *multi item* dapat didekomposisi menjadi fungsi persediaan *single item* dan dapat lebih mudah diselesaikan.

Untuk memastikan bahwa penyelesaian optimum yang diperoleh adalah nilai yang paling minimal, maka perlu dicek sifat konveks dari fungsi objektif dan fungsi kendalanya. Suatu fungsi  $F(X)$  yang kontinu, maka turunan pertamanya dikatakan konveks jika nilai dari turunan keduanya lebih dari atau sama dengan nol [5]:

$$\frac{d^2 F(X)}{dX^2} \geq 0$$

Suatu fungsi  $F(X_1, X_2)$  yang kontinu, maka turunan keduanya dikatakan konveks jika:

$$D = \left( \frac{\partial^2 F}{\partial X_1^2} \right) \left( \frac{\partial^2 F}{\partial X_2^2} \right) - \left( \frac{\partial^2 F}{\partial X_1 \partial X_2} \right)^2 > 0 \quad (2.10)$$

$$\text{dengan } \frac{\partial^2 F}{\partial X_1^2} > 0, \text{ dan } \frac{\partial^2 F}{\partial X_2^2} > 0$$

### **Definisi 2.2**

Jika  $f(x_0) \leq f(x)$  untuk setiap  $x$  dalam domain  $f$ , maka  $f(x_0)$  disebut nilai minimum absolut atau nilai minimum  $f$  [14]. ■

### **2.9 Fill Rate**

Perusahaan perlu menggunakan ukuran-ukuran untuk melihat kinerja persediaan. Pada prinsipnya kinerja persediaan harus berorientasi pada efisiensi operasi di suatu pihak dan pelayanan terhadap pelanggan (*service level*) di pihak lain.

*Fill rate* merupakan persentase jumlah item yang tersedia ketika diminta oleh pelanggan. *Fill rate* biasanya diukur dalam satuan prosentase. Maka dari itu, dapat dikatakan bahwa *fill rate* merupakan jumlah barang yang mampu dipenuhi oleh perusahaan dibagi dengan permintaan [2].

$$\text{fill rate} = \frac{\text{unit deliver}}{\text{demand}} \times 100\%$$

*Fill rate* bisa diukur untuk setiap produk secara individual maupun keseluruhan produk. Untuk menciptakan supply chain manajemen yang efektif, perusahaan mungkin harus membedakan target *fill rate* untuk setiap pelanggan dan setiap item. Perbedaan target *fill rate* ini biasanya mencerminkan nilai strategis dari setiap kelompok item atau kelompok pelanggan tersebut.

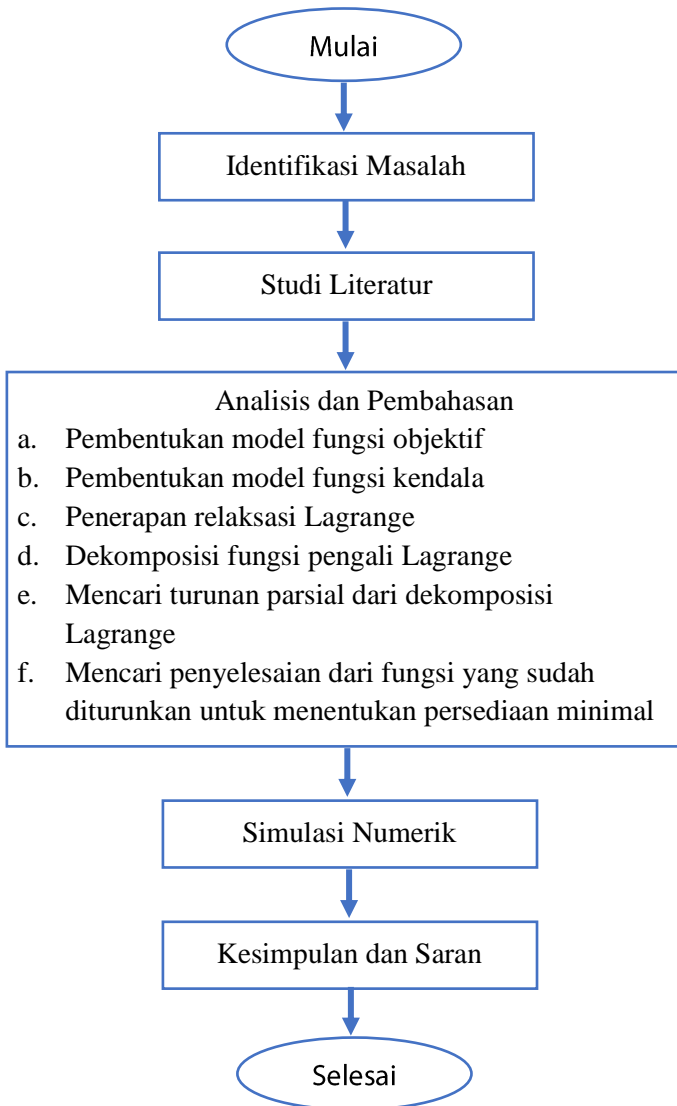


### BAB III METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan dalam tugas akhir ini dibagi menjadi beberapa tahapan-tahapan penelitian dan diberikan diagram alur untuk mempermudah memahami tahapan-tahapan pengerjaan Tugas Akhir.

Tahap-tahap penelitian yang dilakukan pada pengerjaan tugas akhir adalah sebagai berikut:

1. Identifikasi masalah dengan pengumpulan teori pendukung mengenai persediaan suku cadang melalui studi literatur untuk membantu menyelesaikan masalah yang sedang diteliti. Teori pendukung yang dibutuhkan dalam penelitian ini yaitu, teori terkait mengenai *inventory management*, distribusi Poisson, teori antrian, teori METRIC dan metode pengali Lagrange.
2. Pembentukan model matematika. Pertama dengan pembentukan model fungsi objektif, yaitu total biaya pada persediaan suku cadang berdasarkan teori METRIC dan menentukan model fungsi kendala, yaitu *fill rate*. Ukuran *service level* yang digunakan dalam model ini adalah *fill rate* untuk setiap item di masing-masing kelas pelanggan. Setelah itu, menerapkan relaksasi Lagrange pada model fungsi objektif dan fungsi kendala dengan pengali Lagrange. Kemudian, dilakukan dekomposisi fungsi pengali Lagrange suku cadang *multi item* menjadi fungsi satu *item* dan mencari penyelesaian fungsi dengan menurunkan fungsi dekomposisi pengali Lagrange secara parsial terhadap masing-masing variabel dan pengali Lagrange. Setelah itu, menentukan *critical level* masing-masing suku cadang dan menghitung besarnya pengaruh perbedaan kelas pelanggan untuk meminimalkan total biaya persediaan.
3. Tahap simulasi. Pada tahap ini dilakukan simulasi numerik terhadap model yang telah dibentuk dengan menggunakan software MATLAB.



Gambar 3.1: Diagram Alir Metode Penelitian

4. Tahap akhir penelitian ini adalah penulisan laporan tugas akhir dan penarikan kesimpulan terhadap pembahasan yang telah dilakukan sebelumnya serta pemberian saran sebagai masukan untuk penelitian lebih lanjut.

Secara garis besar tahapan-tahapan dalam mengerjakan tugas akhir ini dapat dilihat pada Gambar 3.1

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Bab ini membahas mengenai penentuan model persediaan suku cadang berdasarkan teori METRIC dengan mempertimbangkan perbedaan kelas pelanggan yang ditentukan oleh *fill rate*, penerapan teori antrian untuk mendapatkan rumusan *fill rate* per item pada masing-masing kelas pelanggan, penerapan metode pengali Lagrange untuk memperoleh persediaan optimal dan biaya yang minimal, pengujian distribusi permintaan, dan simulasi numerik.

### 4.1 Pembentukan Model Fungsi Objektif

Untuk pembentukan model, dalam tugas akhir ini menggunakan asumsi bahwa hanya terdapat satu gudang yang digunakan untuk menyimpan suku cadang untuk melayani permintaan dari pelanggan. Setiap produk yang dibeli oleh pelanggan diasumsikan sama (identik) dimana produk tersebut terdiri dari 10 suku cadang utama. Permintaan pada masing-masing kelas pelanggan diasumsikan berdistribusi Poisson. Selanjutnya suku cadang ini disebut sebagai SKU (*stock keeping unit*). Untuk itu, diperlukan adanya pembeda antara SKU satu dengan lainnya maka digunakan indeks  $i = 1, 2, \dots, I$  dan kelas pelanggan diberi indeks  $j = 1, 2, \dots, J$ . Pokok bahasan dalam tugas akhir ini adalah adanya perbedaan kelas pelanggan sehingga  $J \geq 2$ .

Apabila pada produk, terjadi kerusakan dari salah satu suku cadangnya, maka suku cadang tersebut perlu diganti dengan suku cadang yang siap dipakai sehingga produk tersebut dapat digunakan dengan baik. Dengan adanya perbedaan kelas pelanggan, maka ada perbedaan tingkat layanan terhadap masing-masing kelas pelanggan dari segi pemenuhan permintaan. *Fill rate* untuk masing-masing kelas pelanggan dinotasikan dengan  $\beta_{j,obj}$  dengan *fill rate* kelas

pelanggan 1 lebih besar dari *fill rate* kelas pelanggan 2 dan seterusnya. Secara matematis dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\beta_{1,obj} \geq \beta_{2,obj} \geq \dots \geq \beta_{J,obj} \quad (4.1)$$

*Replenishment* setiap suku cadang  $i$  diasumsikan independen dan identik. Pelanggan dari kelas  $j > 1$  mempunyai *fill rate* yang lebih dari atau sama dengan *fill rate* dari kelas pelanggan  $k < j$ . Oleh karena itu, persediaan minimal pelanggan kelas  $j$  lebih dari atau setidaknya sama dengan persediaan minimal yang harus ada di kelas pelanggan  $k$  yaitu:

$$c_{i,1} \leq c_{i,2} \leq \dots \leq c_{i,J}, \quad c_{i,j} \in \mathbb{N} \quad (4.2)$$

Sesuai dengan teori METRIC, fungsi objektif yang akan dibentuk bertujuan untuk meminimalkan total investasi persediaan dengan kendala perbedaan kelas pelanggan dengan rumus *fill rate* pada persamaan (2.2) dan *fill rate* masing-masing kelas pelanggan harus memenuhi persamaan (4.1). Berdasarkan teori METRIC, fungsi objektif dalam model ini dibentuk oleh jumlahan dari *basestock* setiap suku cadang  $i$  dikalikan dengan harga dari suku cadang tersebut. Fungsi objektif ini harus memenuhi persamaan (4.2). Jika harga dari setiap suku cadang  $i$  adalah  $p_i$  maka total investasi persediaan adalah:

(P) minimumkan

$$\sum_{i=1}^I p_i c_i$$

dengan

$$\sum_{i=1}^I \frac{m_{i,j}}{M_j} \beta_{i,j}(c_{i,j}) \geq \beta_{j,obj}, \quad j = 1, 2, \dots, J$$

$$c_{i,1} \leq c_{i,2} \leq \dots \leq c_{i,J} \quad i = 1, 2, \dots, I$$

$$c_{i,1}, c_{i,2}, \dots, c_{i,J} \in \mathbb{N}, \quad i = 1, 2, \dots, I$$

dimana

$$c_i = c_{i,1} + c_{i,2} + \dots + c_{i,J}.$$

## 4.2 Analisa Model

Solusi dari permasalahan ( $P$ ) adalah biaya persediaan yang minimum dari setiap suku cadang  $i$ . Langkah pertama untuk menyelesaikan permasalahan ( $P$ ) adalah mendapatkan rumus untuk menentukan nilai *fill rate* untuk setiap suku cadang  $i$  di kelas pelanggan  $j$  dengan menggunakan teori antrian. Selanjutnya, diterapkan metode relaksasi Lagrange pada fungsi objektif dan fungsi kendala. Setelah itu dilakukan optimasi dengan pengali Lagrange. Optimasi fungsi dengan multiplier Lagrange ini dapat di dekomposisi menjadi permasalahan optimasi untuk satu jenis suku cadang.

### 4.2.1 Analisa Critical Level

Pada subbab ini akan dibahas penurunan rumus sehingga diperoleh rumusan untuk *fill rate*  $\beta_{i,j}(c_{i,j})$  dari teori antrian sehingga bisa diperoleh nilai dari *critical level*  $c_{i,j}$ . Untuk setiap suku cadang  $i$  di kelas pelanggan  $j$ , jumlah persediaan untuk pengisian kembali (*replenishment*) persediaan barang yang masih dalam pengiriman (*pipeline stock*) ditambah jumlah persediaan pada stok fisik selalu sama dengan *basestock level*, yaitu

$$Basestock = pipeline\ stock + \text{stok fisik}$$

dengan waktu tunggu (*lead time*) *replenishment* untuk *pipeline stock* adalah  $T_i$  dan *lead time* untuk setiap suku cadang adalah independen.

Setelah *pipeline* tiba di gudang, maka stok tersebut ditambahkan pada stok fisik. Persediaan pada stok fisik hanya akan berkurang

setelah ada permintaan pelanggan yang dipenuhi, dengan asumsi stok yang lebih lama akan diambil terlebih dahulu. Dalam hal ini keluar masuknya stok pada persediaan di stok fisik mengikuti aturan disiplin antrian FCFS (*First Come First Served*). Permintaan diasumsikan mengikuti distribusi Poisson dengan rata-rata waktu kedatangan berdistribusi eksponensial. Berdasarkan teorema Palm's dan berdasarkan M/M/1 pada persamaan (2.5) diperoleh *steady state* untuk menghitung stock minimal yang berada dalam antrian dengan mensubstitusi  $\rho = m_{i,j}T_i$  adalah sebagai berikut:

$$q_{i,c_{i,j}} = (m_{i,j}T_i)^{c_{i,j}} q_{i,0}$$

$c_{i,j}$  merupakan banyaknya stok minimal (*critical level*) item part  $i$  untuk kelas pelanggan ke  $j$ .  $q_{i,c_{i,j}}$  adalah probabilitas  $c_{i,j}$  berada dalam sistem antrian,  $q_{i,0}$  adalah probabilitas tidak ada stok yang berada dalam sistem antrian, yaitu:

$$q_{i,0} = 1 - m_{i,j}T_i$$

dengan

$$|m_{i,j}T_i| < 1$$

Sehingga

$$q_{i,c_{i,j}} = (m_{i,j}T_i)^{c_{i,j}} (1 - m_{i,j}T_i)$$

*Fill rate* untuk masing masing suku cadang yaitu

$$\begin{aligned} \beta_{i,j}(c_{i,j}) &= q_{i,c_{i,j}-m_i} \\ \beta_{i,j}(c_{i,j}) &= (m_{i,j}T_i)^{c_{i,j}-m_i} (1 - m_{i,j}T_i) \quad (4.3) \end{aligned}$$

dimana  $m_i$  adalah rata-rata permintan untuk item part  $i$ .



#### 4.2.2 Relaksasi Lagrange

Pada bagian ini diterapkan relaksasi Lagrange untuk mencari penyelesaian dari fungsi ( $P$ ). Pada fungsi objektif ( $P$ ) fungsi kendala berlaku untuk setiap kelas pelanggan  $j = 1, 2, \dots, J$ . Oleh Karena itu fungsi kendalanya menjadi:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^J \left( \sum_{i=1}^I \frac{m_{i,j}}{M_j} \beta_{i,j}(c_{i,j}) \geq \beta_{j,obj} \right) \\
 & \approx \sum_{j=1}^J \left( \sum_{i=1}^I \frac{m_{i,j}}{M_j} \beta_{i,j}(c_{i,j}) - \beta_{j,obj} \geq 0 \right) \\
 & \approx \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \frac{m_{i,j}}{M_j} (\beta_{j,obj} - \beta_{i,j}(c_{i,j})) \leq 0 \quad (4.4)
 \end{aligned}$$

Karena fungsi kendala berlaku untuk setiap kelas, maka terdapat  $J$  pengali Lagrange. Untuk itu, digunakan pengali Lagrange  $\lambda_j M_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, J$  dimana  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_J)$ . Berdasarkan metode multiplier Lagrange pada persamaan (2.7), fungsi objektif ( $P$ ) dan fungsi kendala pada persamaan (4.4) menjadi persamaan fungsi Lagrange berikut:

$(L(\lambda))$  minimumkan

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^I p_i c_i + \left( \sum_{j=1}^J \lambda_j M_j \right) \left( \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \frac{m_{i,j}}{M_j} (\beta_{j,obj} - \beta_{i,j}(c_{i,j})) \right) \\
 & = \sum_{i=1}^I p_i c_i + \left( \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \lambda_j m_{i,j} (\beta_{j,obj} - \beta_{i,j}(c_{i,j})) \right)
 \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned} c_{i,1} &\leq c_{i,2} \leq \dots \leq c_{i,J}, & i &= 1, 2, \dots, I \\ c_{i,1}, c_{i,2}, \dots, c_{i,J}, c_i &\in \mathbb{N}, & i &= 1, 2, \dots, I \end{aligned}$$

Pada fungsi di atas  $m_{i,j}(\beta_{j,obj} - \beta_{i,j}(c_{i,j})) = m_{i,j}(1 - \beta_{i,j}(c_{i,j})) + m_{i,j}(\beta_{j,obj} - 1)$ . Dimana,  $m_{i,j}(1 - \beta_{i,j}(c_{i,j}))$  adalah ekspektasi *backorder* per satuan waktu untuk setiap suku cadang  $i$  pada kelas pelanggan  $j$  dan  $m_{i,j}(\beta_{j,obj} - 1)$  adalah konstanta. Oleh Karena itu  $\lambda_j$  menginterpretasikan biaya *backorder* untuk kelas pelanggan  $j$ . Jadi, pada fungsi Lagrange ( $L(\lambda)$ ) terdiri dari investasi persediaan, *penalty cost* untuk semua permintaan yang tidak dapat segera dipenuhi dan konstanta.

### 4.3 Optimalisasi dengan Pengali Lagrange

Pada subbab ini, akan diperoleh solusi dari fungsi ( $L(\lambda)$ ) dimana  $\lambda$  merupakan sebarang vektor nonnegatif. Fungsi objektif ( $L(\lambda)$ ) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} (L(\lambda)) &= \sum_{i=1}^I p_i c_i + \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \lambda_j m_{i,j} (\beta_{j,obj} - \beta_{i,j}(c_{i,j})) \\ &= \sum_{i=1}^I \left( p_i c_i + \sum_{j=1}^J \lambda_j m_{i,j} (\beta_{j,obj} - \beta_{i,j}(c_{i,j})) \right) \\ &= \sum_{i=1}^I \left( p_i c_i + \sum_{j=1}^J \lambda_j (m_{i,j} (\beta_{j,obj} - 1 + 1 - \beta_{i,j}(c_{i,j}))) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^I \left( p_i c_i + \sum_{j=1}^J \lambda_j \left( m_{i,j} \left( 1 - \beta_{i,j}(c_{i,j}) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + m_{i,j}(\beta_{j,obj} - 1) \right) \right) \\
&= \sum_{i=1}^I \left( p_i c_i + \sum_{j=1}^J \lambda_j m_{i,j} \left( 1 - \beta_{i,j}(c_{i,j}) \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^J \lambda_j m_{i,j} (\beta_{j,obj} - 1) \right) \\
&= \sum_{i=1}^I \left\{ p_i c_i + \sum_{j=1}^J \lambda_j m_{i,j} \left( 1 - \beta_{i,j}(c_{i,j}) \right) \right\} \\
&\quad + \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \lambda_j m_{i,j} (\beta_{j,obj} - 1) \\
&= \sum_{i=1}^I \left\{ p_i c_i + \sum_{j=1}^J \lambda_j m_{i,j} \left( 1 - \beta_{i,j}(c_{i,j}) \right) \right\} \\
&\quad + \sum_{j=1}^J \left( \sum_{i=1}^I m_{i,j} \right) (-1) \lambda_j (1 - \beta_{j,obj})
\end{aligned}$$

berdasarkan persamaan (2.1) maka diperoleh,

$$\begin{aligned}
(L(\lambda)) &= \sum_{i=1}^I \left\{ p_i c_i + \sum_{j=1}^J \lambda_j m_{i,j} \left( 1 - \beta_{i,j}(c_{i,j}) \right) \right\} \\
&\quad + \sum_{j=1}^J M_j (-1) \lambda_j (1 - \beta_{j,obj})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^I \left\{ p_i c_i + \sum_{j=1}^J \lambda_j m_{i,j} (1 - \beta_{i,j}(c_{i,j})) \right\} \\
&\quad - \sum_{j=1}^J M_j \lambda_j (1 - \beta_{j,obj}) \tag{4.5}
\end{aligned}$$

Bentuk  $\sum_{j=1}^J M_j \lambda_j (1 - \beta_{j,obj})$  adalah konstan untuk nilai yang diberikan oleh  $\lambda_j$  dan dengan demikian nilai ini dapat diabaikan dalam proses optimasi. Kemudian sisanya didekomposisi menjadi permasalahan suku cadang tunggal yang independen. Persamaan (4.5) didekomposisi menjadi fungsi persediaan untuk satu suku cadang yaitu:

$$I_i \text{ minimumkan } p_i c_i + \sum_{j=1}^J \lambda_j m_{i,j} (1 - \beta_{i,j}(c_{i,j}))$$

dengan

$$\begin{aligned}
&c_{i,1} \leq \dots \leq c_{i,J} \\
&c_{i,1}, c_{i,2}, \dots, c_{i,J} \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Fungsi  $I_i$  merupakan persamaan total biaya persediaan untuk SKU- $i$  yang terdiri dari investasi persediaan  $p_i c_i$  yang merupakan fungsi naik dan *penalty cost* untuk *backorder* yang merupakan fungsi turun. Kombinasi dari fungsi naik dan fungsi turun tersebut mengakibatkan fungsi  $I_i$  bersifat konveks dan memiliki nilai minimum pada suatu titik tertentu.

Selanjutnya, untuk memperoleh solusi dari fungsi ( $P$ ) sama saja dengan memperoleh solusi dari  $I_i$  untuk masing-masing suku cadang  $i$ . Fungsi  $I_i$  dapat diselesaikan dengan melakukan turunan parsial  $I_i$  terhadap  $c_{i,j}$  dan  $\lambda_j$ .  $I_i$  dapat jabarkan dengan mensubstitusi *item fill rate* pada persamaan (4.3). *Item fill rate* untuk masing-masing suku cadang pada setiap kelas pelanggan adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\beta_{i,1}(c_{i,1}) &= (m_{i,1}T_i)^{c_{i,1}-m_i}(1 - m_{i,1}T_i) \\
\beta_{i,2}(c_{i,2}) &= (m_{i,2}T_i)^{c_{i,2}-m_i}(1 - m_{i,2}T_i) \\
\beta_{i,3}(c_{i,3}) &= (m_{i,3}T_i)^{c_{i,3}-m_i}(1 - m_{i,3}T_i) \\
&\vdots \\
\beta_{i,J}(c_{i,J}) &= (m_{i,J}T_i)^{c_{i,J}-m_i}(1 - m_{i,J}T_i)
\end{aligned}$$

dengan mensubstitusi  $\beta_{i,1}(c_{i,1}), \dots, \beta_{i,j}(c_{i,j})$  pada  $I_i$  diperoleh:

$$\begin{aligned}
I_i &= p_i c_i + \sum_{j=1}^J \lambda_j m_{i,j} \left(1 - \beta_{i,j}(c_{i,j})\right) \\
I_i &= p_i(c_{i,1} + c_{i,2} + \dots + c_{i,J}) + \sum_{j=1}^J \lambda_j m_{i,j} \left(1 - \beta_{i,j}(c_{i,j})\right) \\
I_i &= p_i(c_{i,1} + c_{i,2} + \dots + c_{i,J}) + \lambda_1 m_{i,1} \left(1 - \beta_{i,1}(c_{i,1})\right) \\
&\quad + \lambda_2 m_{i,2} \left(1 - \beta_{i,2}(c_{i,2})\right) + \lambda_3 m_{i,3} \left(1 - \beta_{i,3}(c_{i,3})\right) \\
&\quad + \dots + \lambda_J m_{i,J} \left(1 - \beta_{i,J}(c_{i,J})\right) \\
I_i &= p_i(c_{i,1} + c_{i,2} + \dots + c_{i,J}) \\
&\quad + \lambda_1 m_{i,1} \left(1 - (m_{i,1}T_i)^{c_{i,1}-m_i}(1 - m_{i,1}T_i)\right) \\
&\quad + \lambda_2 m_{i,2} \left(1 - (m_{i,2}T_i)^{c_{i,2}-m_i}(1 - m_{i,2}T_i)\right) \\
&\quad + \lambda_3 m_{i,3} \left(1 - (m_{i,3}T_i)^{c_{i,3}-m_i}(1 - m_{i,3}T_i)\right) + \dots \\
&\quad + \lambda_J m_{i,J} \left(1 - (m_{i,J}T_i)^{c_{i,J}-m_i}(1 - m_{i,J}T_i)\right)
\end{aligned}$$

Selanjutnya, untuk mendapatkan *critical level* setiap suku cadang di setiap kelas pelanggan diperoleh dengan melakukan turunan parsial  $I_i$  terhadap  $c_{i,j}$  dan  $\lambda_j$  dengan  $j = 1, 2, \dots, J$ . Penyelesaian

dari fungsi  $I_i$  harus memenuhi kondisi Khun-Tucker pada persamaan (2.8) dan (2.9) yaitu:

$$\begin{aligned}\frac{\partial I_i}{\partial c_{i,1}} &= p_i + \frac{\partial}{\partial c_{i,1}} \left[ -\lambda_1 m_{i,1} (m_{i,1} T_i)^{c_{i,1}-m_i} (1 - m_{i,1} T_i) \right] \\ 0 &= p_i + \left( (1 - m_{i,1} T_i) (-\lambda_1 m_{i,1}) \right) \frac{\partial}{\partial c_{i,1}} \left[ (m_{i,1} T_i)^{(c_{i,1}-m_i)} \right] \\ 0 &= p_i - (1 - m_{i,1} T_i) (\lambda_1 m_{i,1}) (m_{i,1} T_i)^{(c_{i,1}-m_i)} \log(m_{i,1} T_i) \quad (4.6)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial I_i}{\partial c_{i,2}} &= p_i + \frac{\partial}{\partial c_{i,2}} \left[ -\lambda_2 m_{i,2} (m_{i,2} T_i)^{c_{i,2}-m_i} (1 - m_{i,2} T_i) \right] \\ 0 &= p_i + (1 - m_{i,2} T_i) (-\lambda_2 m_{i,2}) \frac{\partial}{\partial c_{i,2}} \left[ (m_{i,2} T_i)^{(c_{i,2}-m_i)} \right] \\ 0 &= p_i - (1 - m_{i,2} T_i) (\lambda_2 m_{i,2}) (m_{i,2} T_i)^{(c_{i,2}-m_i)} \log(m_{i,2} T_i) \quad (4.7)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial I_i}{\partial c_{i,3}} &= p_i + \frac{\partial}{\partial c_{i,3}} \left[ -\lambda_3 m_{i,3} (m_{i,3} T_i)^{c_{i,3}-m_i} (1 - m_{i,3} T_i) \right] \\ 0 &= p_i + (1 - m_{i,3} T_i) (-\lambda_3 m_{i,3}) \frac{\partial}{\partial c_{i,3}} \left[ (m_{i,3} T_i)^{(c_{i,3}-m_i)} \right] \\ 0 &= p_i - (1 - m_{i,3} T_i) (\lambda_3 m_{i,3}) (m_{i,3} T_i)^{(c_{i,3}-m_i)} \log(m_{i,3} T_i) \quad (4.8)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial I_i}{\partial c_{i,J}} &= p_i + \frac{\partial}{\partial c_{i,J}} \left[ -\lambda_J m_{i,J} (m_{i,J} T_i)^{c_{i,J}-m_i} (1 - m_{i,J} T_i) \right] \\ 0 &= p_i + (1 - m_{i,J} T_i) (-\lambda_J m_{i,J}) \frac{\partial}{\partial c_{i,J}} \left[ (m_{i,J} T_i)^{(c_{i,J}-m_i)} \right] \\ 0 &= p_i - (1 - m_{i,J} T_i) (\lambda_J m_{i,J}) (m_{i,J} T_i)^{(c_{i,J}-m_i)} \log(m_{i,J} T_i) \quad (4.9)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial I_i}{\partial \lambda_1} = m_{i,1} \left( 1 - (m_{i,1} T_i)^{c_{i,1}-m_i} (1 - m_{i,1} T_i) \right) = 0 \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial I_i}{\partial \lambda_2} = m_{i,2} \left( 1 - (m_{i,2} T_i)^{c_{i,2}-m_i} (1 - m_{i,2} T_i) \right) = 0 \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial I_i}{\partial \lambda_3} = m_{i,3} \left( 1 - (m_{i,3} T_i)^{c_{i,3}-m_i} (1 - m_{i,3} T_i) \right) = 0 \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial I_i}{\partial \lambda_J} = m_{i,J} \left( 1 - (m_{i,J} T_i)^{c_{i,J}-m_i} (1 - m_{i,J} T_i) \right) = 0 \quad (4.13)$$

selanjutnya dicari penyelesaian dari persamaan (4.10) – (4.13) untuk memperoleh nilai optimal dari  $c_{i,1}$ ,  $c_{i,2}$ ,  $c_{i,3}$ , ...,  $c_{i,J}$  yaitu:

dari persamaan (4.10) bahwa:

$$\begin{aligned} m_{i,1} \left( 1 - (m_{i,1} T_i)^{c_{i,1}-m_i} (1 - m_{i,1} T_i) \right) &= 0 \\ 1 - (m_{i,1} T_i)^{c_{i,1}-m_i} (1 - m_{i,1} T_i) &= 0 \\ (m_{i,1} T_i)^{c_{i,1}-m_i} (1 - m_{i,1} T_i) &= 1 \\ (m_{i,1} T_i)^{c_{i,1}-m_i} &= \frac{1}{1 - m_{i,1} T_i} \\ c_{i,1} - m_i &= \log_{m_{i,1} T_i} \frac{1}{1 - m_{i,1} T_i} \\ c_{i,1} &= m_i - \log_{m_{i,1} T_i} (1 - m_{i,1} T_i) \\ c_{i,1} &= m_i - \frac{\log (1 - m_{i,1} T_i)}{\log m_{i,1} T_i} \end{aligned}$$

karena persamaan (4.10) sampai dengan persamaan (4.13) identik, maka diperoleh penyelesaian untuk persamaan (4.11), (4.12) dan (4.13) berturut-turut adalah:

$$\begin{aligned} c_{i,2} &= m_i - \frac{\log (1 - m_{i,2} T_i)}{\log m_{i,2} T_i} \\ c_{i,3} &= m_i - \frac{\log (1 - m_{i,3} T_i)}{\log m_{i,3} T_i} \\ c_{i,J} &= m_i - \frac{\log (1 - m_{i,J} T_i)}{\log m_{i,J} T_i} \end{aligned}$$

selanjutnya, dari persamaan (4.6) diperoleh:

$$\begin{aligned}
 0 &= p_i - (1 - m_{i,1}T_i)(\lambda_1 m_{i,1})(m_{i,1}T_i)^{(c_{i,1}-m_i)} \log(m_{i,1}T_i) \\
 (1 - m_{i,1}T_i)(\lambda_1 m_{i,1})(m_{i,1}T_i)^{(c_{i,1}-m_i)} \log(m_{i,1}T_i) &= p_i \\
 \lambda_1 &= \frac{p_i}{m_{i,1}(1 - m_{i,1}T_i)(m_{i,1}T_i)^{(c_{i,1}-m_i)} \log(m_{i,1}T_i)}
 \end{aligned}$$

karena persamaan (4.6) sampai dengan persamaan (4.9) identik, maka diperoleh penyelesaian untuk persamaan (4.7), (4.8) dan (4.9) berturut-turut adalah:

$$\begin{aligned}
 \lambda_2 &= \frac{p_i}{m_{i,2}(1 - m_{i,2}T_i)(m_{i,2}T_i)^{(c_{i,2}-m_i)} \log(m_{i,2}T_i)} \\
 \lambda_3 &= \frac{p_i}{m_{i,3}(1 - m_{i,3}T_i)(m_{i,3}T_i)^{(c_{i,3}-m_i)} \log(m_{i,3}T_i)} \\
 \lambda_j &= \frac{p_i}{m_{i,j}(1 - m_{i,j}T_i)(m_{i,j}T_i)^{(c_{i,j}-m_i)} \log(m_{i,j}T_i)}
 \end{aligned}$$

Untuk meyakinkan bahwa solusi yang diperoleh merupakan solusi yang optimal dalam meminimalkan biaya maka dapat dicek dengan melakukan perhitungan pada turunan kedua sesuai dengan persamaan (2.10) yaitu:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 I_i}{\partial (c_{i,1})^2} &= \lambda_1 m_{i,1} (m_{i,1}T_i)^{c_{i,1}-m_i} (m_{i,1}T_i - 1) (\log(m_{i,1}T_i))^2 > 0 \\
 \frac{\partial^2 I_i}{\partial (c_{i,2})^2} &= \lambda_2 m_{i,2} (m_{i,2}T_i)^{c_{i,2}-m_i} (m_{i,2}T_i - 1) (\log(m_{i,2}T_i))^2 > 0 \\
 \frac{\partial^2 I_i}{\partial (c_{i,3})^2} &= \lambda_3 m_{i,3} (m_{i,3}T_i)^{c_{i,3}-m_i} (m_{i,3}T_i - 1) (\log(m_{i,3}T_i))^2 > 0
 \end{aligned}$$



$$\frac{\partial^2 I_i}{\partial (c_{i,4})^2} = \lambda_4 m_{i,4} (m_{i,4} T_i)^{c_{i,4}-m_i} (m_{i,4} T_i - 1) (\log(m_{i,4} T_i))^2 > 0$$

$$\frac{\partial^2 I_i}{\partial (c_{i,5})^2} = \lambda_5 m_{i,5} (m_{i,5} T_i)^{c_{i,5}-m_i} (m_{i,5} T_i - 1) (\log(m_{i,5} T_i))^2 > 0$$

kemudian

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 I_i}{\partial c_{i,1} \partial c_{i,2}} &= \frac{\partial^2 I_i}{\partial c_{i,1} \partial c_{i,3}} = \frac{\partial^2 I_i}{\partial c_{i,1} \partial c_{i,4}} = \frac{\partial^2 I_i}{\partial c_{i,1} \partial c_{i,5}} = \frac{\partial^2 I_i}{\partial c_{i,2} \partial c_{i,3}} = 0 \\ \frac{\partial^2 I_i}{\partial c_{i,2} \partial c_{i,4}} &= \frac{\partial^2 I_i}{\partial c_{i,2} \partial c_{i,5}} = \frac{\partial^2 I_i}{\partial c_{i,3} \partial c_{i,4}} = \frac{\partial^2 I_i}{\partial c_{i,3} \partial c_{i,5}} = \frac{\partial^2 I_i}{\partial c_{i,4} \partial c_{i,5}} = 0 \end{aligned}$$

Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} D &= \left( \frac{\partial^2 I_i}{\partial (c_{i,1})^2} \right) \left( \frac{\partial^2 I_i}{\partial (c_{i,2})^2} \right) \left( \frac{\partial^2 I_i}{\partial (c_{i,3})^2} \right) \left( \frac{\partial^2 I_i}{\partial (c_{i,4})^2} \right) \left( \frac{\partial^2 I_i}{\partial (c_{i,5})^2} \right) \\ &\quad - \left( \frac{\partial^2 I_i}{\partial c_{i,1} \partial c_{i,2}} \right)^2 - \left( \frac{\partial^2 I_i}{\partial c_{i,1} \partial c_{i,3}} \right)^2 - \left( \frac{\partial^2 I_i}{\partial c_{i,1} \partial c_{i,4}} \right)^2 \\ &\quad - \left( \frac{\partial^2 I_i}{\partial c_{i,1} \partial c_{i,5}} \right)^2 - \left( \frac{\partial^2 I_i}{\partial c_{i,2} \partial c_{i,3}} \right)^2 - \left( \frac{\partial^2 I_i}{\partial c_{i,2} \partial c_{i,5}} \right)^2 \\ &\quad - \left( \frac{\partial^2 I_i}{\partial c_{i,2} \partial c_{i,4}} \right)^2 - \left( \frac{\partial^2 I_i}{\partial c_{i,3} \partial c_{i,4}} \right)^2 - \left( \frac{\partial^2 I_i}{\partial c_{i,3} \partial c_{i,5}} \right)^2 \\ &\quad - \left( \frac{\partial^2 I_i}{\partial c_{i,4} \partial c_{i,5}} \right)^2 \\ D &= \left( \frac{\partial^2 I_i}{\partial (c_{i,1})^2} \right) \left( \frac{\partial^2 I_i}{\partial (c_{i,2})^2} \right) \left( \frac{\partial^2 I_i}{\partial (c_{i,3})^2} \right) \left( \frac{\partial^2 I_i}{\partial (c_{i,4})^2} \right) \left( \frac{\partial^2 I_i}{\partial (c_{i,5})^2} \right) > 0 \end{aligned}$$

Karena nilai  $D$  lebih dari nol maka berdasarkan persamaan (2.10) fungsi  $I_i$  dikatakan bersifat konveks, sehingga dapat dipastikan bahwa fungsi  $I_i$  memiliki nilai yang minimal.

#### **4.4 Simulasi**

Pada subbab ini, akan dilakukan simulasi numerik dari model yang telah diperoleh. Terdapat 10 jenis suku cadang utama pada mesin server di PT XYZ. Data yang diperoleh merupakan data permintaan per bulan pada periode September 2015 sampai dengan periode Agustus 2016. Data permintaan 10 jenis suku cadang dari 5 kelas pelanggan selama satu tahun terdapat dalam Lampiran B. Perbedaan kelas pelanggan ini dikelompokkan berdasarkan banyaknya permintaan selama satu tahun. Langkah-langkah pembagian kelas pelanggan dijelaskan dalam Lampiran A.

Kriteria pengelompokan kelas pelanggan ditentukan dengan banyaknya permintaan dengan aturan sebagai berikut:

1. Kelas pelanggan 1 dengan total permintaan lebih dari 1300 item per tahun.
2. Kelas pelanggan 2 dengan total permintaan lebih dari 1200 sampai dengan 1300 item per tahun.
3. Kelas pelanggan 3 dengan total permintaan lebih dari 1150 sampai dengan 1200 item per tahun.
4. Kelas pelanggan 4 dengan total permintaan 1100 sampai dengan 1150 item per tahun.
5. Kelas pelanggan 5 dengan total permintaan kurang dari 1100 item per tahun.

##### **4.4.1 Uji Distribusi Permintaan**

Pada tahap awal dilakukan uji distribusi dari permintaan pelanggan terhadap 10 jenis suku cadang. Uji yang digunakan yaitu uji Kolmogorov Smirnov dengan menggunakan Software EasyFit 5.5. Sesuai dengan asumsi bahwa permintaan untuk setiap suku cadang di setiap bulan selama satu tahun pada masing-masing kelas pelanggan berdistribusi Poisson, sedangkan permintaan pada bulan yang sama dari antar kelas pelanggan tidak harus mengikuti distribusi Poisson. Hasil uji distribusi permintaan terhadap masing-masing SKU dapat dilihat pada Lampiran C. Hasil uji dari 10 SKU dapat dilihat pada Tabel 4.1.

Tabel 4.1. Hasil uji distribusi Poisson permintaan suku cadang dengan uji Kolmogorov Smirnov

Permintaan	Rank	Permintaan	Rank
SKU 1	3	SKU 6	2
SKU 2	3	Kelas 7	3
SKU 3	2	Kelas 8	1
SKU 4	2	Kelas 9	1
SKU 5	2	Kelas 10	1

Dari hasil uji Kolmogorov Smirnov diketahui bahwa data permintaan per SKU secara keseluruhan pada setiap kelas pelanggan dapat dikatakan berdistribusi Poisson dengan rank distribusi Poisson 1, 2 dan 3.

#### 4.4.2 Menghitung Persediaan Minimal Suku Cadang

Data yang digunakan untuk simulasi adalah total permintaan masing-masing suku cadang selama satu tahun. Atribut untuk masing-masing SKU dapat dilihat pada Tabel 4.2 dengan total biaya persediaan awal sebesar Rp 1.037.625.500,00. Diberikan target pemenuhan permintaan untuk setiap kelas pelanggan sesuai dengan persamaan (4.1) yaitu  $\beta_{1,obj} = 0.98$ ,  $\beta_{2,obj} = 0.96$ ,  $\beta_{3,obj} = 0.95$ ,  $\beta_{4,obj} = 0.92$ ,  $\beta_{5,obj} = 0.90$ .

Selanjutnya dilakukan perhitungan jumlah persediaan minimal untuk suku cadang pada masing masing kelas pelanggan. Langkah-langkah mencari penyelesaian untuk 10 suku cadang adalah sebagai berikut:

Langkah pertama

Harga SKU 1 :  $p_1 = 999.900$

Lead time :  $T_1 = 7hari = 0.01918$  tahun

Rata-rata permintaan

SKU 1 per tahun :  $m_1 = \frac{125}{5} = 25$

Permintaan perkelas pelanggan:  $m_{1,1} = 34, m_{1,2} = 33,$   
 $m_{1,3} = 29, m_{1,4} = 18, m_{1,5} = 11.$

Tabel 4.2: Atribut Suku Cadang

No	Jumlah Permintaan	Harga Satuan (Rp)	Biaya Per SKU (Rp)	Lead Time (hari)
1	125	999.900	124.987.500	7
2	211	145.000	30.595.000	5
3	1030	130.000	133.900.000	1
4	170	599.900	101.983.000	7
5	785	120.000	94.200.000	2
6	800	199.900	159.920.000	1
7	180	700.000	126.000.000	6
8	960	49.000	47.040.000	1
9	460	150.000	69.000.000	2
10	1320	120.000	150.000.000	1
Total Biaya (Rp)			1.037.625.500	-

Langkah kedua

Menghitung *item fill rate* per kelas pelanggan menggunakan rumus (4.3) yaitu:

*item fill rate* SKU-1 kelas pelanggan 1

$$\beta_{1,1}(c_{1,1}) = (m_{1,1} T_1)^{c_{1,1}-m_1} (1 - m_{1,1} T_1)$$

$$\beta_{1,1}(c_{1,1}) = (34(0.01918))^{c_{1,1}-25} (1 - 34(0.01918))$$

$$\beta_{1,1}(c_{1,1}) = (0.71925)^{c_{1,1}-25} (0.28075)$$

*item fill rate* SKU-1 kelas pelanggan 2

$$\beta_{1,2}(c_{1,2}) = (m_{1,2} T_1)^{c_{1,2}-m_1} (1 - m_{1,2} T_1)$$

$$\beta_{1,2}(c_{1,2}) = (33(0.01918))^{c_{1,1}-25}(1 - 33(0.01918))$$

$$\beta_{1,2}(c_{1,2}) = (0.59937)^{c_{1,1}-25}(0.40063)$$

*item fill rate* SKU-1 kelas pelanggan 3

$$\beta_{1,3}(c_{1,3}) = (m_{1,3} T_1)^{c_{1,3}-m_1}(1 - m_{1,3} T_1)$$

$$\beta_{1,3}(c_{1,3}) = (29(0.01918))^{c_{1,3}-25}(1 - 29(0.01918))$$

$$\beta_{1,3}(c_{1,3}) = (0.47945)^{c_{1,1}-25}(0.52055)$$

*item fill rate* SKU-1 kelas pelanggan 4

$$\beta_{1,4}(c_{1,4}) = (m_{1,4} T_1)^{c_{1,4}-m_1}(1 - m_{1,4} T_1)$$

$$\beta_{1,4}(c_{1,4}) = (18(0.01918))^{c_{1,4}-25}(1 - 18(0.01918))$$

$$\beta_{1,4}(c_{1,4}) = (0.35963)^{c_{1,4}-25}(0.64037)$$

*item fill rate* SKU-1 kelas pelanggan 5

$$\beta_{1,5}(c_{1,5}) = (m_{1,5} T_1)^{c_{1,5}-m_1}(1 - m_{1,5} T_1)$$

$$\beta_{1,5}(c_{1,5}) = (11(0.01918))^{c_{1,5}-25}(1 - 11(0.01918))$$

$$\beta_{1,5}(c_{1,5}) = (0.23975)^{c_{1,5}-25}(0.76025)$$

Langkah ketiga

Substitusi masing-masing *item fill rate* pada fungsi  $I_i$ .

$I_1$  minimumkan

$$I_1 = p_1 c_i + \sum_{j=1}^5 \lambda_j m_{1,j} (1 - \beta_{1,j}(c_{1,j}))$$

dengan

$$c_{1,1} \leq c_{1,2} \leq c_{1,3} \leq c_{1,4} \leq c_{1,5}$$

$$c_{1,1}, c_{1,2}, c_{1,3}, c_{1,4}, c_{1,5} \in \mathbb{N}$$

menjadi:

$$\begin{aligned}
I_1 = & p_1(c_{1,1} + c_{1,2} + c_{1,3} + c_{1,4} + c_{1,5}) + \lambda_1 m_{1,1} (1 - \beta_{1,1}(c_{1,1})) \\
& + \lambda_2 m_{1,2} (1 - \beta_{1,2}(c_{1,2})) \\
& + \lambda_3 m_{1,3} (1 - \beta_{1,3}(c_{1,3})) \\
& + \lambda_4 m_{1,4} (1 - \beta_{1,4}(c_{1,4})) \\
& + \lambda_5 m_{1,5} (1 - \beta_{1,5}(c_{1,5}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_1 = & 999900(c_{1,1} + c_{1,2} + c_{1,3} + c_{1,4} + c_{1,5}) \\
& + 34\lambda_1(1 - (0.71925)^{c_{1,1}-25}(0.28075)) \\
& + 33\lambda_2(1 - (0.59937)^{c_{1,1}-25}(0.40063)) \\
& + 29\lambda_3(1 - (0.47945)^{c_{1,1}-25}(0.52055)) \\
& + 18\lambda_4(1 - (0.35963)^{c_{1,4}-25}(0.64037)) \\
& + 11\lambda_5(1 - (0.23975)^{c_{1,5}-25}(0.76025))
\end{aligned}$$

Langkah keempat

Lakukan turunan parsial  $I_1$  terhadap  $c_{1,j}$  dan  $\lambda_j$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I_1}{\partial c_{1,1}} &= 999900 + \frac{\partial}{\partial c_{1,1}} [-34\lambda_1(0.71925)^{c_{1,1}-25}(0.28075)] \\
0 &= 999900 - 34\lambda_1(0.28075) \frac{\partial}{\partial c_{1,1}} [(0.71925)^{c_{1,1}-25}] \\
0 &= 999900 - 10.52813\lambda_1[(0.71925)^{c_{1,1}-25} \log(0.71925)]
\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I_1}{\partial c_{1,2}} &= 999900 + \frac{\partial}{\partial c_{1,2}} [-33\lambda_2(0.59937)^{c_{1,1}-25}(0.40063)] \\
0 &= 999900 - 33\lambda_2(0.40063) \frac{\partial}{\partial c_{1,2}} [(0.59937)^{c_{1,2}-25}] \\
0 &= 999900 - 12.51969\lambda_2[(0.59937)^{c_{1,2}-25} \log(0.59937)]
\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I_1}{\partial c_{1,3}} &= 999900 + \frac{\partial}{\partial c_{1,3}} [-29\lambda_3(0.47945)^{c_{1,3}-25}(0.52055)] \\
0 &= 999900 - 29\lambda_3(0.52055) \frac{\partial}{\partial c_{1,3}} [(0.47945)^{c_{1,3}-25}] \\
0 &= 999900 - 13.0137\lambda_3[(0.47945)^{c_{1,3}-25} \log(0.47945)]
\end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I_1}{\partial c_{1,4}} &= 999900 + \frac{\partial}{\partial c_{1,4}} [-18\lambda_4(0.35963)^{c_{1,4}-25}(0.64037)] \\
0 &= 999900 - 18\lambda_4(0.64037) \frac{\partial}{\partial c_{1,4}} [(0.35963)^{c_{1,4}-25}] \\
0 &= 999900 - 1200694\lambda_4[(0.35963)^{c_{1,4}-25} \log(0.35963)]
\end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial I_1}{\partial c_{1,5}} &= 999900 + \frac{\partial}{\partial c_{1,5}} [-11\lambda_5(0.23975)^{c_{1,5}-25}(0.76025)] \\
0 &= 999900 - 11\lambda_5(0.76025) \frac{\partial}{\partial c_{1,5}} [(0.23975)^{c_{1,5}-25}] \\
0 &= 999900 - 9.50325\lambda_5[(0.23975)^{c_{1,5}-25} \log(0.23975)]
\end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial \lambda_1} = 34 \left( 1 - (0.71925)^{c_{1,1}-25}(0.28075) \right) = 0 \tag{4.19}$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial \lambda_2} = 33 \left( 1 - (0.59937)^{c_{1,1}-25}(0.40063) \right) = 0 \tag{4.20}$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial \lambda_3} = 29 \left( 1 - (0.47945)^{c_{1,4}-25}(0.52055) \right) = 0 \tag{4.21}$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial \lambda_4} = 18 \left( 1 - (0.35963)^{c_{1,4}-25}(0.64037) \right) = 0 \tag{4.22}$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial \lambda_5} = 11 \left( 1 - (0.23975)^{c_{1,5}-25}(0.76025) \right) = 0 \tag{4.23}$$

Langkah selanjutnya

Mencari penyelesaian dari persamaan (4.14) – (4.18)

Dari persamaan (4.14) yaitu:

$$34 \left( 1 - (0.71925)^{c_{1,1}-25} (0.28075) \right) = 0$$

$$(0.71925)^{c_{1,1}-25} = \frac{1}{0.28075}$$

diperoleh  $c_{1,1} - 25 = -5$  sehingga nilai  $c_{1,1} = 20$ , dengan cara yang sama, untuk persamaan (4.15)–(4.18) diperoleh penyelesaian  $c_{1,2} = 20, c_{1,3} = 21, c_{1,4} = 21, c_{1,5} = 22$ .

Penyelesaian ini memenuhi  $c_{1,1} \leq c_{1,2} \leq c_{1,3} \leq c_{1,4} \leq c_{1,5}$  dan  $c_{1,1}, c_{1,2}, c_{1,3}, c_{1,4}, c_{1,5} \in \mathbb{N}$ .

Sehingga, total persediaan minimal SKU-1 adalah:

$$\begin{aligned} c_1 &= c_{1,1} + c_{1,2} + c_{1,3} + c_{1,4} + c_{1,5} \\ &= 20 + 20 + 21 + 21 + 22 \\ &= 115 \end{aligned}$$

Dari persamaan (4.19) dan substitusi  $c_{1,1} = 20$  yaitu:

$$\begin{aligned} 0 &= 999900 - 10.52813\lambda_1[(0.71925)^{20-25} \log(0.71925)] \\ 999900 &= 10.52813\lambda_1[(0.71925)^4 \log(0.71925)] \end{aligned}$$

diperoleh,

$$\lambda_1 = \frac{999900}{10.52813 \times [(0.71925)^4 \log(0.71925)]} = 81183$$

dengan cara yang sama, untuk persamaan (4.20) - (4.23) diperoleh penyelesaian  $\lambda_2 = 48729, \lambda_3 = 43261, \lambda_4 = 24420, \lambda_5 = 13929$ .



Total biaya minimal untuk SKU-1 adalah:

$$p_1 \times c_1 = 115 \times 999900 = 114988500$$

Hasil optimasi dengan menggunakan software MATLAB untuk 10 SKU dapat dilihat pada Tabel 4.3 dan Tabel 4.4.

Tabel 4.3: Hasil optimasi suku cadang dengan metode pengali Lagrange

SKU- <i>i</i>	<i>Critical level</i>					Jumlah	Harga Satuan (Rp)	Jumlah Biaya (Rp)
	$c_{i,1}$	$c_{i,2}$	$c_{i,3}$	$c_{i,4}$	$c_{i,5}$			
1	20	20	21	21	22	115	999900	115988400
2	37	39	39	41	41	197	145000	27260000
3	204	204	204	204	204	1020	130000	131300000
4	3	30	32	32	32	129	599900	76187300
5	119	139	142	149	149	696	120000	93360000
6	159	159	159	159	159	759	199900	158320800
7	33	33	34	34	34	168	700000	106400000
8	190	190	190	190	191	851	49000	46354000
9	90	90	91	91	91	453	150000	67050000
10	246	246	246	247	247	1232	120000	138720000
<b>Total</b>						<b>5656</b>	<b>-</b>	<b>960940500</b>

Solusi dari  $I_i$  juga merupakan solusi untuk  $(P)$  dikarenakan  $I_i$  merupakan hasil dekomposisi dari  $(P)$  yang juga memenuhi:

$$c_{i,1} \leq c_{i,2} \leq \dots \leq c_{i,J} \quad i = 1, 2, \dots, I$$

$$c_{i,1}, c_{i,2}, \dots, c_{i,J} \in \mathbb{N}, \quad i = 1, 2, \dots, I$$

sehingga diperoleh total persediaan minimal yang harus disimpan di gudang adalah 5656. Jumlah ini adalah akumulasi dari persediaan

minimal untuk setiap kelas pelanggan dari 10 macam suku cadang dengan biaya minimal sebesar Rp 971.070.100,00.

Total biaya sebelum dilakukan optimasi dengan metode Lagrange adalah sebesar Rp 1.037.625.500,00 sehingga diperoleh penurunan biaya sebesar 6.4%.

Tabel 4.4: Nilai lambda dari 10 SKU di setiap kelas pelanggan

SKU- <i>i</i>	Multiplier Lagrange					Jumlah
	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	
1	81183	48729	43261	24420	13929	211522
2	14077	8128	4358	3636	1744	31943
3	2157	1153	719	609	304	4942
4	145953	49606	32875	21459	19476	269369
5	817	541	577	343	932	3210
6	1649	1103	1182	733	462	5129
7	100669	43909	31796	25470	13419	215263
8	648	404	231	238	136	1657
9	2981	1910	1219	1358	797	8265
10	8122	2302	1199	894	525	13042
<b>Total</b>						<b>764342</b>

Untuk memastikan bahwa solusi yang diperoleh merupakan solusi yang paling minimal, maka dapat dicek dengan melakukan perhitungan turunan kedua yaitu:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 I_1}{\partial (c_{1,1})^2} &= \lambda_1 m_{1,1} (m_{1,1} T_1)^{c_{1,1} - m_1} (m_{1,1} T_1 - 1) (\log(m_{1,1} T_1))^2 \\
 &= 81183(34)(0.71925)^{21-25} (0.28075) (\log(0.71925))^2 \\
 &= 38377.26 > 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 I_1}{\partial (c_{1,2})^2} &= \lambda_2 m_{1,2} (m_{1,2} T_1 - 1) (m_{1,2} T_1)^{(c_{1,2} - m_1)} (\log(m_{1,2} T_1))^2 \\
 &= 48729(33)(0.59937)^{23-25} (0.40063) (\log(0.59937))^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 53455.38 > 0 \\
\frac{\partial^2 I_1}{\partial (c_{1,3})^2} &= \lambda_3 m_{i,3} (m_{1,3} T_1 - 1) (m_{1,3} T_1)^{(c_{1,3}-m_1)} (\log(m_{1,3} T_1))^2 \\
&= 50112(29)(0.47945)^{24-25} (0.52055) (\log(0.47945))^2 \\
&= 138634.78 > 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 I_1}{\partial (c_{1,4})^2} &= \lambda_4 m_{1,4} (m_{1,4} T_1)^{c_{1,4}-m_1} (m_{1,4} T_1 - 1) (\log(m_{1,4} T_1))^2 \\
&= 38440(18)(0.42192)^{24-25} (0.527808) (\log(0.42192))^2 \\
&= 162743.03 > 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 I_1}{\partial (c_{1,5})^2} &= \lambda_5 m_{1,5} (m_{1,5} T_1)^{c_{1,5}-m_1} (m_{1,5} T_1 - 1) (\log(m_{1,5} T_1))^2 \\
&= 35303(11)(0.40274)^{24-25} (0.59726) (\log(0.40274))^2 \\
&= 171518.29 > 0
\end{aligned}$$

kemudian

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 SI(1)}{\partial c_{1,1} \partial c_{1,2}} &= \frac{\partial^2 SI(1)}{\partial c_{1,1} \partial c_{1,3}} = \frac{\partial^2 SI(1)}{\partial c_{1,1} \partial c_{1,4}} = \frac{\partial^2 SI(1)}{\partial c_{1,1} \partial c_{1,5}} = \frac{\partial^2 SI(1)}{\partial c_{1,2} \partial c_{1,3}} = 0 \\
\frac{\partial^2 SI(1)}{\partial c_{1,2} \partial c_{1,4}} &= \frac{\partial^2 SI(1)}{\partial c_{1,2} \partial c_{1,5}} = \frac{\partial^2 SI(1)}{\partial c_{1,3} \partial c_{1,4}} = \frac{\partial^2 SI(1)}{\partial c_{1,3} \partial c_{1,5}} = \frac{\partial^2 SI(1)}{\partial c_{1,4} \partial c_{1,5}} = 0
\end{aligned}$$

Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}
D &= \left( \frac{\partial^2 I_1}{\partial (c_{1,1})^2} \right) \left( \frac{\partial^2 I_1}{\partial (c_{1,2})^2} \right) \left( \frac{\partial^2 I_1}{\partial (c_{1,3})^2} \right) \left( \frac{\partial^2 I_1}{\partial (c_{1,4})^2} \right) \left( \frac{\partial^2 I_1}{\partial (c_{1,5})^2} \right) \\
&\quad - \left( \frac{\partial^2 I_1}{\partial c_{1,1} \partial c_{1,2}} \right)^2 - \left( \frac{\partial^2 I_1}{\partial c_{1,1} \partial c_{1,3}} \right)^2 - \left( \frac{\partial^2 I_1}{\partial c_{1,1} \partial c_{1,4}} \right)^2 \\
&\quad - \left( \frac{\partial^2 I_1}{\partial c_{1,1} \partial c_{1,5}} \right)^2 - \left( \frac{\partial^2 I_1}{\partial c_{1,2} \partial c_{1,3}} \right)^2 - \left( \frac{\partial^2 I_1}{\partial c_{1,2} \partial c_{1,4}} \right)^2 \\
&\quad - \left( \frac{\partial^2 I_1}{\partial c_{1,2} \partial c_{1,5}} \right)^2 - \left( \frac{\partial^2 I_1}{\partial c_{1,3} \partial c_{1,4}} \right)^2 - \left( \frac{\partial^2 I_1}{\partial c_{1,3} \partial c_{1,5}} \right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left( \frac{\partial^2 I_1}{\partial c_{1,4} \partial c_{1,5}} \right)^2 \\
& = (104252.04)(124120.16)(138634.78)(162743.03)(171518.29) \\
& = 5.0074 \times 10^{25} > 0
\end{aligned}$$

Karena nilai  $D$  lebih dari nol dan memenuhi persamaan (2.10) maka fungsi  $I_1$  bersifat konveks. Oleh karena itu, fungsi  $I_1$  dijamin memiliki nilai minimal.

Optimasi yang telah dilakukan hanya diperoleh satu titik kritis, sesuai dengan definisi 2.2 bahwa  $I_1(c_1) < I_1(c_n)$  untuk setiap  $c_n$  dalam domain  $I_1$  dan  $c_1$  adalah titik kritis dari fungsi  $I_1$  maka nilai dari  $c_1$  adalah nilai terkecil pada domain fungsi  $I_1$  sehingga nilai di titik tersebut merupakan minimum absolut atau nilai yang paling minimal. Sehingga, penyelesaian yang diperoleh dari optimasi ini merupakan biaya persediaan yang paling minimal.

Karena dalam hal ini  $\lambda$  merupakan biaya dari *backorder*, maka dapat dikatakan bahwa nilai ini merupakan besarnya risiko yang akan ditanggung perusahaan apabila terjadinya *backorder*. Proses optimasi yang telah dilakukan dengan metode pengali Lagrange pada data yang digunakan dalam tugas akhir ini menghasilkan total biaya *backorder* sebesar Rp 764.342,00 dengan total biaya persediaan minimum sebesar Rp 971.070.100,00. Jumlah ini menunjukkan bahwa hasil optimasi yang telah dilakukan masih memiliki risiko peluang terjadi *backorder* sebesar 0.8%.

## BAB V

### KESIMPULAN DAN SARAN

#### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis dan pembahasan yang telah dilakukan dalam tugas akhir ini dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Model persediaan suku cadang berdasarkan teori METRIC dengan kendala perbedaan kelas pelanggan adalah sebagai berikut:

$$(P) = \min \sum_{i=1}^I p_i c_i, \quad i = 1, 2, \dots, I$$

dengan kendala

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^I \frac{m_{i,j}}{M_j} \beta_{i,j}(c_{i,j}) &\geq \beta_{j,obj}, & j = 1, 2, \dots, J \\ c_{i,1} &\leq c_{i,2} \leq \dots \leq c_{i,J}, & i = 1, 2, \dots, I \\ c_{i,1}, c_{i,2}, \dots, c_{i,J} &\in \mathbb{N}, & i = 1, 2, \dots, I \end{aligned}$$

dimana

$$c_i = c_{i,1} + c_{i,2} + \dots + c_{i,J}$$

$$\beta_{i,j}(c_{i,j}) = (m_{i,j} T_{i,j})^{c_{i,j} - m_i} (1 - m_{i,j} T_{i,j})$$

2. Perbedaan kelas pelanggan memiliki pengaruh dalam menentukan jumlah persediaan minimal. Besarnya pengaruh tersebut bergantung pada kesesuaian pembagian kelas pelanggan. Hasil optimasi dengan menggunakan data yang diperoleh dari PT. XYZ dengan pembagian menjadi 5 kelas pelanggan dari 10 suku cadang utama mesin server diperoleh hasil bahwa terjadi penurunan biaya sebesar 6.4% dengan resiko kemungkinan terjadi *backorder* sebesar 0.8%.

## 5.2 Saran

Berdasarkan pembahasan, simulasi dan kesimpulan yang telah dilakukan, untuk penelitian selanjutnya pembagian kelas pelanggan perlu memperhatikan jumlah permintaan pelanggan. Perlu mengkaji metode tertentu untuk mengelompokkan pelanggan-pelanggan dengan memperhatikan faktor-faktor yang dianggap perlu. Permasalahan ini juga dapat di selesaikan dengan metode yang lain seperti metode *Rationing Policy*.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Ristono, A. (2009). **Manajemen Persediaan**. Edisi Pertama. Graha Ilmu, Yogyakarta.
- [2] Pujawan, I. N. (2010). *Supply Chain Management*. Edisi Kedua. Surabaya: Guna Widya.
- [3] Basten, R.J.I ., Van, H.G.J. (2014). *System-oriented inventory models for spare part*. Survey in Operation Research and Management Science Vol 19, Hal. 34-55. Netherlands.
- [4] Topan, E. Z., Bayindir, P., Tan, T. (2016). *Heuristics for Multi-Item Two-Echelon Spare Parts Inventory Control Subject to Aggregate and Individual Service Measures*. European Journal of Operational Research. Netherlands.
- [5] Tersine, R. J. (1994). *Principles of Inventory and Materials Management*. Fourth Edition. Prentice-Hall, New Jersey.
- [6] Indrajit, E. R., Djokopranoto, R. (2003). **Manajemen Persediaan Barang Umum dan Suku Cadang untuk Keperluan Pemeliharaan, Perbaikan, dan Operasi**. PT Grasindo. Jakarta.
- [7] Sherbrooke, C. C. (2004). *Optimal Inventory Modeling of Systems Multi-Echelon Techniques*. Secound Edition. Kluwer Academic Publisher. New York.
- [8] Walpole, R.E. (1982). **Pengantar Statistika**. Edisi 3. Alih Bahasa: Bambang Sumantri. Gramedia Pustaka Utama. Jakarta.
- [9] Sahoo, P. (2013). *Probability and Mathematical Statistics*. Departement of Mathematics, University of Louisville. Louisville, KY 40292 USA.

- [10] Taha, H. A. (1997). **Riset Operasi Suatu Pengantar**. Edisi Kelima. Alih Bahasas: Daniel Wirajaya. Binapura Aksara. Jakarta.
- [11] Taha, H.A. (1982). *Operations Research an Introduction*. Second Edition. Macmillan Publishing Co, Inc. 866 Third Avenue, New York.
- [12] Spiecel, M. R. (1984). **Kalkulus Lanjutan Versi S1/Metrik**. Alih Bahasa: Pantur Silaban. Erlangga. Jakarta.
- [13] Soemartojo, N. (1987). **Kalkulus Lanjutan**. UI-Press. Jakarta.
- [14] Dosen-dosen Jurusan Matematika FMIPA ITS. (2012). **Kalkulus 1**. Edisi ke-4. ITS Press. Surabaya.



## **LAMPIRAN A**

### **Langkah-langkah Pembagian Kelas Pelanggan**

Langkah-langkah pembagian kelas pelanggan dalam tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Data yang diperoleh dari PT. XYZ merupakan data permintaan terhadap 10 suku cadang utama dari mesin server yang merupakan data permintaan per bulan selama satu tahun. Data permintaan dapat dilihat pada Lampiran B.
2. Dilakukan uji distribusi Poisson terhadap data permintaan per bulan untuk setiap suku cadang dengan menggunakan software EasyFit. Hasil uji distribusi permintaan dapat dilihat ada Lampiran C.
3. Dari data permintaan per bulan untuk setiap suku cadang dihitung total permintaan perbulan untuk setiap suku cadang. Kemudian, dilakukan pembagian terhadap masing-masing kelas pelanggan di setiap suku cadang. Pembagian ini dilakukan secara generat dengan asumsi permintaan berdistribusi Poisson dengan menggunakan software MATLAB. Permin-taan masing-masing kelas pelanggan untuk setiap suku cadang dapat dilihat pada Lampiran D.
4. Menghitung total permintaan per tahun masing-masing kelas pelanggan untuk 10 suku cadang. Total ini selanjutnya menjadi dasar pembagian kelas pelanggan secara umum. Hasil perhitungan dapat dilihat pada Lampiran D.

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## LAMPIRAN B

### Data Permintaan Pelanggan terhadap 10 Suku Cadang

Tabel B1. Data permintaan pelanggan per bulan untuk SKU-1 sampai dengan SKU-5

Bulan	Permintaan suku cadang				
	1	2	3	4	5
Sep-15	15	19	108	17	67
Okt-15	9	13	62	11	64
Nov-15	11	18	77	17	65
Des-15	13	19	99	13	68
Jan-16	10	18	61	10	60
Feb-16	11	19	103	18	63
Mar-16	9	16	86	16	63
Apr-16	10	21	83	10	73
May-16	13	15	103	22	66
Jun-16	7	15	91	13	67
Jul-16	9	21	56	13	65
Aug-16	8	17	101	10	64
<b>Total</b>	<b>125</b>	<b>211</b>	<b>1030</b>	<b>170</b>	<b>785</b>

Tabel B2. Data permintaan pelanggan per bulan untuk SKU-6 sampai dengan SKU-10

Bulan	Permintaan suku cadang				
	6	7	8	9	10
Sep-15	89	16	52	51	124
Okt-15	100	14	55	45	123
Nov-15	75	12	62	32	107
Des-15	46	14	65	38	98
Jan-16	53	17	69	41	99
Feb-16	58	13	75	37	104
Mar-16	56	15	81	31	97
Apr-16	77	15	88	45	88
May-16	70	15	90	24	106
Jun-16	80	16	102	31	106
Jul-16	54	19	105	43	99
Aug-16	42	14	116	42	99
<b>Total</b>	<b>800</b>	<b>180</b>	<b>960</b>	<b>460</b>	<b>1250</b>

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

**LAMPIRAN C**  
**Uji Kolmogorov Smirnov Distribusi Permintaan dengan**  
**Software EasyFit**

#	Distribution	<b>Kolmogorov Smirnov</b>		<b>Anderson Darling</b>	
		Statistic	Rank	Statistic	Rank
1	Binomial	0.2333	2	1.0554	2
2	D. Uniform	0.20833	1	4.0749	4
3	Geometric	0.5197	4	3.8699	3
4	Logarithmic	0.65982	5	6.3665	5
5	Poisson	0.24033	3	0.72019	1
6	Bernoulli	No fit (data max > 1)			
7	Hypergeometric	No fit			
8	Neg. Binomial	No fit			

Gambar C1. Uji distribusi permintaan untuk SKU-1

#	Distribution	<b>Kolmogorov Smirnov</b>		<b>Anderson Darling</b>	
		Statistic	Rank	Statistic	Rank
1	Binomial	0.28761	2	2.1075	2
2	D. Uniform	0.17857	1	2.8138	3
3	Geometric	0.58063	4	4.5927	4
4	Logarithmic	0.71724	5	7.369	5
5	Poisson	0.29325	3	1.3686	1
6	Bernoulli	No fit (data max > 1)			
7	Hypergeometric	No fit			
8	Neg. Binomial	No fit			

Gambar C2. Uji distribusi permintaan untuk SKU-2

## LAMPIRAN C (LANJUTAN)

#	Distribution	Kolmogorov Smirnov		Anderson Darling	
		Statistic	Rank	Statistic	Rank
1	Binomial	0.26898	3	2.5527	2
2	D. Uniform	0.25	1	3.7554	3
3	Geometric	0.56659	4	4.4408	4
4	Logarithmic	0.70654	5	7.1872	5
5	Poisson	0.26131	2	1.1534	1
6	Bernoulli	No fit (data max > 1)			
7	Hypergeometric	No fit			
8	Neg. Binomial	No fit			

Gambar C3. Uji distribusi permintaan untuk SKU-3

#	Distribution	Kolmogorov Smirnov		Anderson Darling	
		Statistic	Rank	Statistic	Rank
1	Binomial	0.11393	1	0.33255	1
2	D. Uniform	0.19697	3	4.0712	4
3	Geometric	0.5296	4	3.8635	3
4	Logarithmic	0.6835	5	6.7128	5
5	Poisson	0.15865	2	0.44088	2
6	Bernoulli	No fit (data max > 1)			
7	Hypergeometric	No fit			
8	Neg. Binomial	No fit			

Gambar C4. Uji distribusi permintaan untuk SKU-4

## LAMPIRAN C (LANJUTAN)

#	Distribution	Kolmogorov Smirnov		Anderson Darling	
		Statistic	Rank	Statistic	Rank
1	Binomial	0.34528	3	6.1376	4
2	D. Uniform	0.25	1	4.0748	2
3	Geometric	0.58298	4	4.5785	3
4	Logarithmic	0.70605	5	7.0552	5
5	Poisson	0.33855	2	1.672	1
6	Bernoulli	No fit (data max > 1)			
7	Hypergeometric	No fit			
8	Neg. Binomial	No fit			

Gambar C5. Uji distribusi permintaan untuk SKU-5

#	Distribution	Kolmogorov Smirnov		Anderson Darling	
		Statistic	Rank	Statistic	Rank
1	Binomial	0.1905	1	0.38874	1
2	D. Uniform	0.21212	3	4.234	4
3	Geometric	0.49909	4	3.8108	3
4	Logarithmic	0.66515	5	6.6632	5
5	Poisson	0.19216	2	0.44213	2
6	Bernoulli	No fit (data max > 1)			
7	Hypergeometric	No fit			
8	Neg. Binomial	No fit			

Gambar C6. Uji distribusi permintaan untuk SKU-6

## LAMPIRAN C (LANJUTAN)

#	Distribution	Kolmogorov Smirnov		Anderson Darling	
		Statistic	Rank	Statistic	Rank
1	Binomial	0.2354	1	0.52898	1
2	D. Uniform	0.25	2	4.1609	4
3	Geometric	0.51787	4	4.04	3
4	Logarithmic	0.67418	5	6.7921	5
5	Poisson	0.25885	3	0.70508	2
6	Bernoulli	No fit (data max > 1)			
7	Hypergeometric	No fit			
8	Neg. Binomial	No fit			

Gambar C7. Uji distribusi permintaan untuk SKU-7

#	Distribution	Kolmogorov Smirnov		Anderson Darling	
		Statistic	Rank	Statistic	Rank
1	Binomial	0.19823	2	0.76702	2
2	D. Uniform	0.21212	3	7.4389	5
3	Geometric	0.48886	4	3.629	3
4	Logarithmic	0.65007	5	6.35	4
5	Poisson	0.19501	1	0.71873	1
6	Bernoulli	No fit (data max > 1)			
7	Hypergeometric	No fit			
8	Neg. Binomial	No fit			

Gambar C8. Uji distribusi permintaan untuk SKU-8



## LAMPIRAN C (LANJUTAN)

#	Distribution	Kolmogorov Smirnov		Anderson Darling	
		Statistic	Rank	Statistic	Rank
1	Binomial	0.17213	3	0.32414	2
2	D. Uniform	0.16667	2	4.0754	4
3	Geometric	0.44929	4	3.3102	3
4	Logarithmic	0.62299	5	6.078	5
5	Poisson	0.16554	1	0.28807	1
6	Bernoulli	No fit (data max > 1)			
7	Hypergeometric	No fit			
8	Neg. Binomial	No fit			

Gambar C9. Uji distribusi permintaan untuk SKU-9

#	Distribution	Kolmogorov Smirnov		Anderson Darling	
		Statistic	Rank	Statistic	Rank
1	Binomial	0.21585	2	0.63435	1
2	D. Uniform	0.21795	3	4.3401	4
3	Geometric	0.52266	4	3.9041	3
4	Logarithmic	0.68354	5	6.8217	5
5	Poisson	0.20973	1	0.66325	2
6	Bernoulli	No fit (data max > 1)			
7	Hypergeometric	No fit			
8	Neg. Binomial	No fit			

Gambar C10. Uji distribusi permintaan untuk SKU-10

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

**LAMPIRAN D**  
**Permintaan Masing-Masing Kelas Pelanggan**


Tabel D1. Data permintaan pelanggan per tahun terhadap 10 Suku Cadang

SKU	Permintaan Per Kelas Pelanggan					Total
	1	2	3	4	5	
1	34	33	29	18	11	125
2	55	50	49	30	27	211
3	218	216	203	199	194	1030
4	48	37	30	28	27	170
5	170	161	159	148	147	785
6	169	162	159	156	154	800
7	38	38	36	334	34	180
8	203	203	189	188	177	960
9	106	93	90	89	82	460
10	262	251	250	246	241	1250
<b>Jumlah</b>	<b>1304</b>	<b>1246</b>	<b>1197</b>	<b>1140</b>	<b>1099</b>	<b>5971</b>


*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## LAMPIRAN E

### Hasil Optimasi Persediaan dengan Software MATLAB



**Optimasi Persediaan Suku Cadang**



---

**Input**

	Kelas 1	Kelas 2	Kelas 3	Kelas 4	Kelas 5
<b>Demand</b>	34	33	29	18	11
Lead Time	7		Harga Suku Cadang 999900		

---


**Proses**

---


**Output**

Rata-rata Demand	25				
<b>Hasil</b>					
Persediaan Minimal	22	22	23	24	24
Nilai Lambda	54796	45731	40957	27534	15618
Total Persediaan	115		Total Biaya Persediaan 114988500		

Gambar E1. Optimasi SKU-1 dengan MATLAB



**Optimasi Persediaan Suku Cadang**



---

**Input**

	Kelas 1	Kelas 2	Kelas 3	Kelas 4	Kelas 5
<b>Demand</b>	55	50	49	30	27
Lead Time	5		Harga Suku Cadang 145000		

---

**Proses**

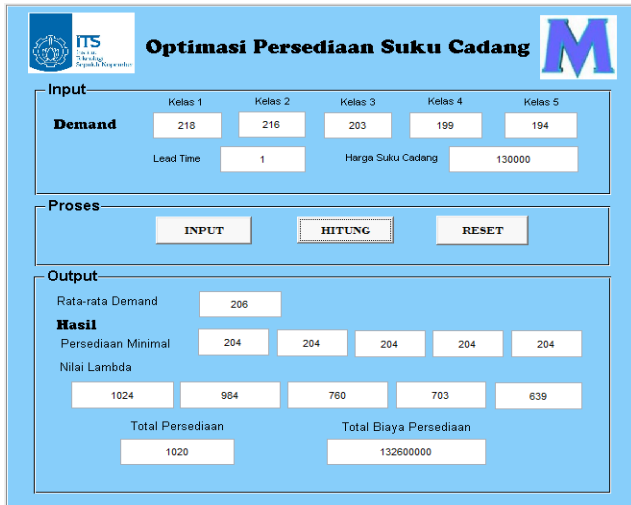
---

**Output**

Rata-rata Demand	42.2				
<b>Hasil</b>					
Persediaan Minimal	37	39	39	41	41
Nilai Lambda	8663	7245	6305	3174	2597
Total Persediaan	197		Total Biaya Persediaan 28565000		

Gambar E2. Optimasi SKU-2 dengan MATLAB

## LAMPIRAN E (LANJUTAN)



**Optimasi Persediaan Suku Cadang**

**Input**

	Kelas 1	Kelas 2	Kelas 3	Kelas 4	Kelas 5
<b>Demand</b>	218	216	203	199	194
Lead Time	1		Harga Suku Cadang		
			130000		

**Proses**

INPUT HITUNG RESET

**Output**

Rata-rata Demand: 206

**Hasil**

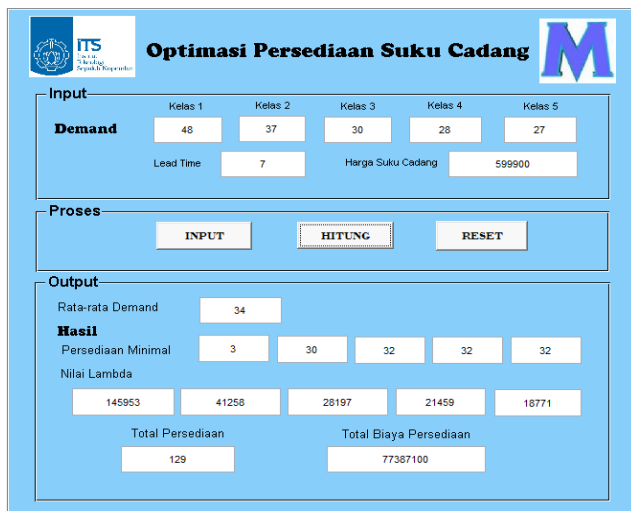
Persediaan Minimal: 204, 204, 204, 204, 204

Nilai Lambda: 1024, 984, 760, 703, 639

Total Persediaan: 1020

Total Biaya Persediaan: 132600000

Gambar E3. Optimasi SKU-3 dengan MATLAB



**Optimasi Persediaan Suku Cadang**

**Input**

	Kelas 1	Kelas 2	Kelas 3	Kelas 4	Kelas 5
<b>Demand</b>	48	37	30	28	27
Lead Time	7		Harga Suku Cadang		
			599900		

**Proses**

INPUT HITUNG RESET

**Output**

Rata-rata Demand: 34

**Hasil**

Persediaan Minimal: 3, 30, 32, 32, 32

Nilai Lambda: 145953, 41258, 28197, 21459, 18771

Total Persediaan: 129

Total Biaya Persediaan: 77387100

Gambar E4. Optimasi SKU-4 dengan MATLAB

## LAMPIRAN E (LANJUTAN)

**Optimasi Persediaan Suku Cadang**

**Input**

	Kelas 1	Kelas 2	Kelas 3	Kelas 4	Kelas 5
<b>Demand</b>	170	161	159	148	147
Lead Time	2		Harga Suku Cadang		
			120000		

**Proses**

INPUT HITUNG RESET

**Output**

Rata-rata Demand: 157

**Hasil**

Persediaan Minimal: 119 139 142 149 149

Nilai Lambda: 9799 5286 5377 3829 3437

Total Persediaan: 698

Total Biaya Persediaan: 83760000

Gambar E5. Optimasi SKU-5 dengan MATLAB

**Optimasi Persediaan Suku Cadang**

**Input**

	Kelas 1	Kelas 2	Kelas 3	Kelas 4	Kelas 5
<b>Demand</b>	169	162	159	156	154
Lead Time	1		Harga Suku Cadang		
			199900		

**Proses**

INPUT HITUNG RESET

**Output**

Rata-rata Demand: 160

**Hasil**

Persediaan Minimal: 159 159 159 159 159

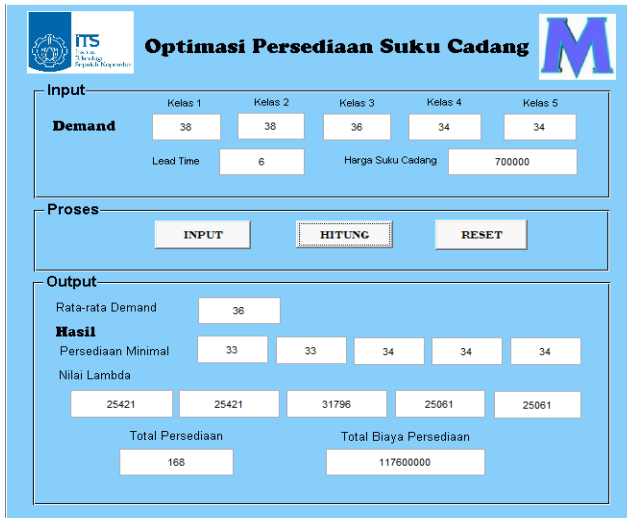
Nilai Lambda: 1324 1212 1167 1125 1097

Total Persediaan: 795

Total Biaya Persediaan: 158920500

Gambar D6. Optimasi SKU-6 dengan MATLAB

## LAMPIRAN E (LANJUTAN)



**Optimasi Persediaan Suku Cadang**

**Input**

	Kelas 1	Kelas 2	Kelas 3	Kelas 4	Kelas 5
<b>Demand</b>	38	38	36	34	34
Lead Time	6		Harga Suku Cadang		
			700000		

**Proses**

INPUT HITUNG RESET

**Output**

Rata-rata Demand: 36

**Hasil**

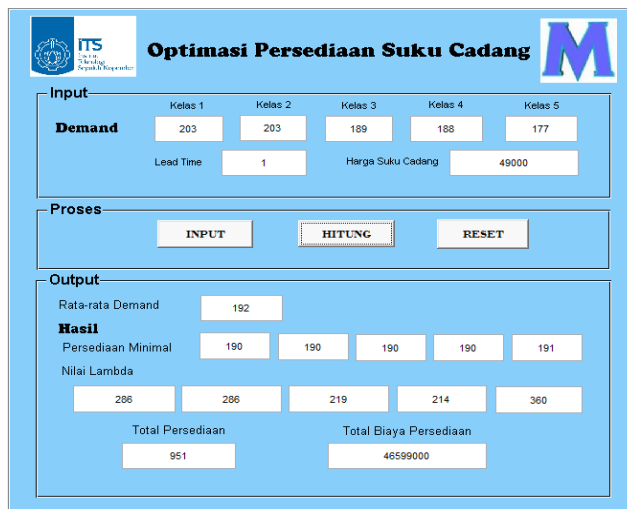
Persediaan Minimal: 33, 33, 34, 34, 34

Nilai Lambda: 25421, 25421, 31796, 25061, 25061

Total Persediaan: 168

Total Biaya Persediaan: 117600000

Gambar E7. Optimasi SKU-7 dengan MATLAB



**Optimasi Persediaan Suku Cadang**

**Input**

	Kelas 1	Kelas 2	Kelas 3	Kelas 4	Kelas 5
<b>Demand</b>	203	203	189	188	177
Lead Time	1		Harga Suku Cadang		
			49000		

**Proses**

INPUT HITUNG RESET

**Output**

Rata-rata Demand: 192

**Hasil**

Persediaan Minimal: 190, 190, 190, 190, 191

Nilai Lambda: 286, 286, 219, 214, 360

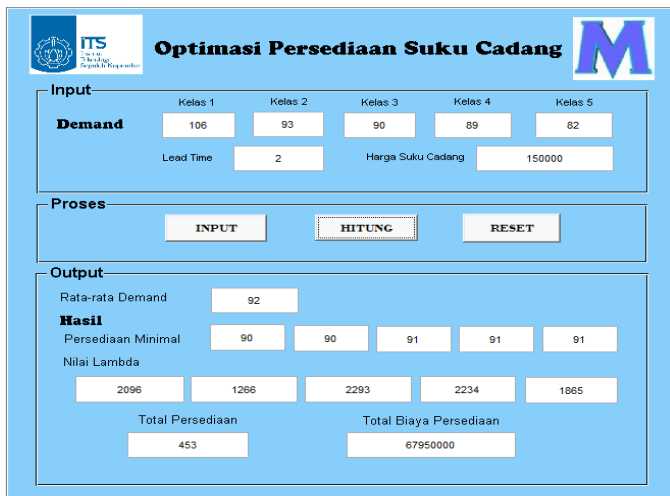
Total Persediaan: 951

Total Biaya Persediaan: 46599000

Gambar E8. Optimasi SKU-8 dengan MATLAB



## LAMPIRAN E (LANJUTAN)



**Optimasi Persediaan Suku Cadang**

**Input**

	Kelas 1	Kelas 2	Kelas 3	Kelas 4	Kelas 5
<b>Demand</b>	106	93	90	89	82
Lead Time	2		Harga Suku Cadang		
			150000		

**Proses**

INPUT HITUNG RESET

**Output**

Rata-rata Demand: 92

**Hasil**

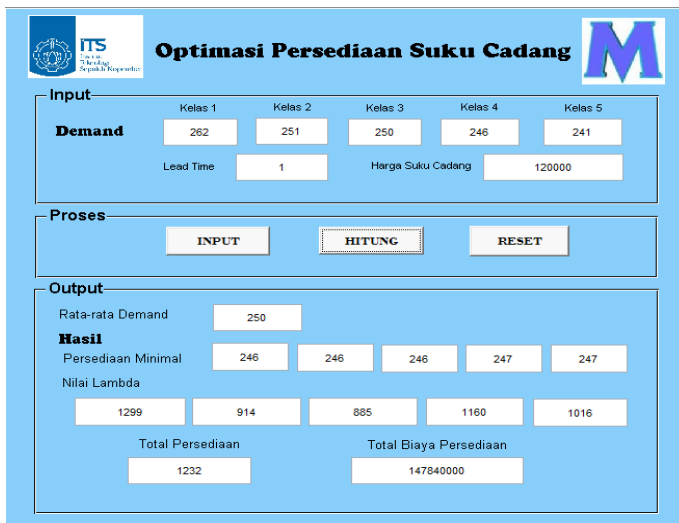
Persediaan Minimal: 90, 90, 91, 91, 91

Nilai Lambda: 2096, 1266, 2293, 2234, 1865

Total Persediaan: 453

Total Biaya Persediaan: 67950000

Gambar E9. Optimasi SKU-9 dengan MATLAB



**Optimasi Persediaan Suku Cadang**

**Input**

	Kelas 1	Kelas 2	Kelas 3	Kelas 4	Kelas 5
<b>Demand</b>	262	251	250	246	241
Lead Time	1		Harga Suku Cadang		
			120000		

**Proses**

INPUT HITUNG RESET

**Output**

Rata-rata Demand: 250

**Hasil**

Persediaan Minimal: 246, 246, 246, 247, 247

Nilai Lambda: 1299, 914, 885, 1160, 1016

Total Persediaan: 1232

Total Biaya Persediaan: 147840000

Gambar E10. Optimasi SKU-10 dengan MATLAB

*“Halaman ini sengaja dikosongkan”*

## **LAMPIRAN F**

### **BIODATA PENULIS**



**Imroatus Siyamah** lahir di Pamekasan, 14 Februari 1994. Jenjang pendidikan formal yang ditempuh oleh penulis dimulai dari TK Muslimat NU VII (1997-2001), SDN Sentol 1 (2001-2007), MTs Nurur Rahmah (2007-2010), SMAN 1 Pamekasan (2010-2013). Kemudian melanjutkan studi ke jenjang S1 di jurusan Matematika ITS pada tahun 2013-sekarang. Di jurusan Matematika ITS penulis mengambil bidang minat Matematika Terapan. Penulis bergabung dengan organisasi di HIMATIKA ITS sebagai staff departemen Sains dan Teknologi (2014-2015) dan staff Applied Sains (2015-2016), staff departemen Dalam Negeri UKM Cinta Rebana ITS (2014-2015) dan staff departemen Hubungan Luar Negeri (2015-2016), Wakil Sekretaris Pergerakan Mahasiswa Islam Indonesia Komisariat Sepuluh Nopember (2015-2016).

Jika ingin memberikan kritik, saran, tanggapan dan diskusi mengenai Laporan Tugas Akhir ini, bisa melalui email [imroatussiyamah@gmail.com](mailto:imroatussiyamah@gmail.com)

Semoga bermanfaat.